CALCULO 11-M
Examen Septiembre 99

10 de Septiembre de 1999

Primera Parte

Duracion 1h 30m

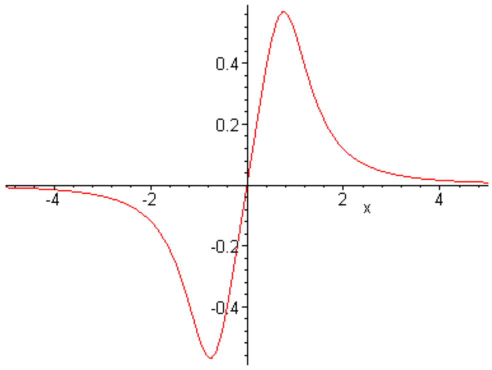
Ejercicio 1 *(4 puntos)*

1. *Resolver la desigualdad*
$$\left|5+\frac{1}{x}\right| \geq 2.$$
2. *Dibujar la gráfica de una función continua en un intervalo no acotado cuyo conjunto imagen sea un intervalo cerrado.*
3. *Usando el Teorema del Valor Medio probar que* $|\cos x - 1| \leq |x|$.
4. *Obtener* $F'(x)$ *siendo*
$$F(x)=\int_x^{x^2} \frac{2}{\left(1+t^2\right)^2}\, dt.$$

Solución:

1. Las soluciones de la desigualdad
$$\left|5+\frac{1}{x}\right| \geq 2$$
son los $x \neq 0$ tales que
$$5+\frac{1}{x} \leq -2 \text{ o } 5+\frac{1}{x} \geq 2.$$
Estas dos relaciones son equivalentes a
$$7+\frac{1}{x} \leq 0 \text{ o } 3+\frac{1}{x} \geq 0$$
o bien
$$\frac{7x+1}{x} \leq 0 \text{ o } \frac{3x+1}{x} \geq 0.$$
La primera relación se satisface cuando numerador y denominador sea de distinto signo, es decir para
$$-\frac{1}{7} \leq x \leq 0.$$
Y la segunda cuando ambos sea del mismo signo, es decir cuando
$$x \leq -\frac{1}{3} \text{ 0 } x \geq 0.$$
Reuniendo los tres conjuntos de soluciones y eliminando $x=0$ resulta el conjunto
$$S=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{7},0\right) \cup (0,+\infty).$$

2. Ejemplo de gráfica de una función continua cuyo dominio es un intervalo no acotado, $(-\infty, \infty)$ y su imagen es un intervalo cerrado, el intervalo $[-1/2, 1/2]$.



3. La desigualdad es evidentemente cierta para $x = 0$. Supongamos $x > 0$. La función $f(t) = \cos t$ es continua en el intervalo cerrado $[0, x]$ y derivable en el intervalo $(0, x)$. Según el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial exite un $c \in (0, x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0).$$

Substituyendo y tomando valores absolutos se sigue que

$$|\cos x - \cos 0| = |-\sin c|\, |x - 0| \, .$$

Puesto que $-1 \leq -\sin c \leq 1$ resulta

$$|\cos x - \cos 0| \leq |x - 0|$$

o bien

$$|\cos x - 1| \leq |x| \, .$$

Por último, si $x < 0$, entonces $-x > 0$. Aplicando el resultado anterior a $-x$ se obtiene

$$|\cos x - 1| = |\cos(-x) - 1| \leq |-x| = |x|$$

lo que prueba la desigualdad para todo x.

4. La derivada de

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

es

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2}{\left(1+(x^2)^2\right)^2}2x - \frac{2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1+x^4)^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(3 puntos) Analizar la gráfica de la función*

$$f(x) = \sqrt{|x^2-2|}.$$

Solución:

Dominio Para todo x se verifica

$$\left|x^2-2\right| \geq 0$$

por tanto el dominio es toda la recta real $\mathcal{R}$.

Simetría Puesto que

$$f(-x) = \sqrt{|(-x)^2-2|} = \sqrt{|x^2-2|} = f(x)$$

se trata de una función par y por tanto simétrica respecto del eje OY.

Cortes con el eje OX Son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir, $x = \pm\sqrt{2}$

Corte con el eje OY $y = f(0) = \sqrt{2}$.

Asíntotas Verticales No posee asíntotas verticales

Comportamiento en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{|x^2-2|} = +\infty.$$

Crecimiento o decrecimiento Analizaremos el signo de la primera derivada. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{si } |x| < \sqrt{2} \\ \sqrt{x^2-2} & \text{si } |x| > \sqrt{2} \end{cases}$$

se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } |x| < \sqrt{2} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} & \text{si } |x| > \sqrt{2} \end{cases}.$$

En consecuencia,

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ o } x > \sqrt{2} \\ < 0 & \text{si } x < -\sqrt{2} \text{ o } 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}.$$

Por tanto la función crece estrictamente en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y decrece tambien estrictamente en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

Puntos críticos, Maximos y mínimos Del estudio de las derivadas hecho anteriormente se deduce que $f'(x)=0$ solo para $x=0$. Además, cuando $x\to\sqrt{2}^-$, $f'(x)\to-\infty$ y cuando $x\to\sqrt{2}^+$, $f'(x)\to+\infty$ por lo que f posee una cúspide vertical en $x=\sqrt{2}$. Análogamente, o por simetría posee una cúspide vertical en $x=-\sqrt{2}$. Comparando los valores que f alcanza en estos tres puntos críticos con los límites en $\pm\infty$ calculados anteriormente se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x^2-2|} &= +\infty\\
f(-\sqrt{2}) &= 0\\
f(0) &= \sqrt{2}\\
f(\sqrt{2}) &= 0,\\
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{|x^2-2|} &= +\infty
\end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que existe un máximo local en $x=0$ y mínimos absolutos en $x=\pm\sqrt{2}$.

Concavidad y Convexidad Analizaremos el signo de la derivada segunda. Si $|x|<\sqrt{2}$

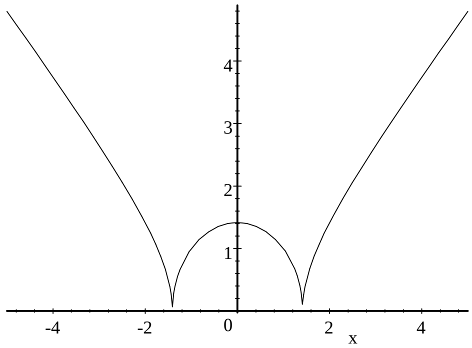
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-\sqrt{2-x^2}-(-x)\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}}{(2-x^2)}\\
&= \frac{-2}{(2-x^2)^{3/2}}\\
&< 0
\end{aligned}$$

y por consiguiente cócava hacia abajo. Si $|x|>\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\sqrt{x^2-2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}}{(x^2-2)}\\
&= \frac{-2}{(x^2-2)^{3/2}}\\
&< 0
\end{aligned}$$

y por tanto también cóncava hacia abajo.

Gráfica



Ejercicio 3 *(3 puntos) Sea R la región encerrada por la gráfica de la función $y = \ln x$, el eje OX y las verticales $x = 1$ y $x = e$. Calcular:*

1. *El área de dicha región.*
2. *El volumen del sólido engendrado al girar la región R alrededor del eje OX.*

Solución:

1. El área esta definida por la integral

$$A = \int_1^e \ln x \, dx.$$

Para obtener una primitiva de la función $\ln x$ procederemos por partes. Haciendo

$$u = \ln x \text{ y } dv = dx$$

se tiene

$$du = \frac{dx}{x} \text{ y } v = x$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x(\ln x - 1). \end{aligned}$$

En la última integración no hemos incluido la constante ya que solo necesitamos una primitiva. Con ello resulta

$$\begin{aligned} A &= [x(\ln x - 1)]_1^e \\ &= e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) \\ &= e(1 - 1) - (0 - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. El volumen del sólido de revolución está definido por la integral

$$V = \int_1^e \pi (\ln x)^2 \, dx$$

Para obtener una primitiva de la función $(\ln x)^2$ procederemos por partes. Haciendo

$$u = \ln x \text{ y } dv = \ln x \, dx$$

y teniendo en cuenta que una primitiva de la función $\ln x$ ha sido obtenida en el apartado anterior se tiene

$$du = \frac{dx}{x} \text{ y } v = x(\ln x - 1).$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2 \, dx &= x \ln x(\ln x - 1) - \int x(\ln x - 1) \frac{dx}{x} \\
&= x \ln x(\ln x - 1) - \int \ln x \, dx + \int 1 \, dx \\
&= x \ln x(\ln x - 1) - x(\ln x - 1) + x \\
&= x \left[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right].
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso nuevamente de la primitiva del $\ln x$ calculada anteriormente. Con ello resulta

$$\begin{aligned}
V &= \pi x \left[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right] \Big|_1^e \\
&= \pi e [1 - 2 + 2] - \pi [2] \\
&= \pi (e - 2).
\end{aligned}$$

Segunda Parte

Duracion 1h 30m

Ejercicio 4 *(4 puntos)*

1. *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}.$$

2. *Probar que si* $\|\mathbf{r}(t)\| = k$ *(constante), entonces* $\mathbf{r}$ *y* $\mathbf{r}'$ *son perpendiculares.*

3. *Estudiar la continuidad en* $(0,0)$ *de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\frac{y}{x} & si\ x \neq 0\ e\ y \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0\ o\ y = 0 \end{cases} .$$

4. *Determinar la derivada direccional de la función* $f(x,y,z) = xy^2 + 2yz + 3zx^2$ *en el punto* $(1,-2,3)$ *según la dirección* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución:

1. Para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ por tanto se trata de una serie alternada de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n = 1/\sqrt{n}$. Puesto que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

según el criterio de las series alternadas podemos asegurar que converge.

2. Si $\|\mathbf{r}(t)\| = k$ (constante), entonces

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = k^2.$$

Derivando con respecto a t y teniendo en cuenta que k^2 es una constante se obtiene

$$0 = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\,\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

De aquí se sigue que

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

y por tanto $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son perpendiculares.

3. Sea

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

A lo largo de la recta $y = \pi x$ se tiene

$$\begin{aligned} L_{y=\pi x} &= \lim_{x\to 0} f(x,\pi x) \\ &= \lim_{x\to 0} \cos\frac{\pi x}{x} \\ &= \cos\pi \\ &= -1. \end{aligned}$$

Por tanto, si existiera el límite L (aunque no es necesario se puede comprobar que no existe) este sería $-1 \neq f(0,0) = 1$. Por tanto la función no es continua en $(0,0)$.

4. La derivada direccional de f en P según el vector $\mathbf{v}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f(P)\cdot\mathbf{u}$$

siendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\left\|\mathbf{v}\right\|$. En nuestro caso

$$\begin{aligned} \nabla f &= f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} \\ &= (y^2+6zx)\,\mathbf{i} + (2xy+2z)\,\mathbf{j} + (2y+3x^2)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

por lo que

$$\nabla f(1,-2,3) = 22\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{k}.$$

Por otra parte,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f &= \nabla f(P)\cdot\mathbf{u} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(22\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(22-2-1) \\ &= \frac{19\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(3 puntos) La posición de una partícula en función del tiempo es*

$$\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\sin t\,\mathbf{j}.$$

1. *Determinar los instantes en los que la direccion del movimiento es horizontal.*

2. *Distancia recorrida entre $t_0 = 0$ y $t_1 = 11\pi/6$.*

3. *En el instante t_1 la partícula abandona la curva anterior siguiendo la dirección de la tangente. ¿En qué instante posterior pasa por encima del eje OX?*

Solución:

1. Son los instantes en los que el vector tangente es paralelo al eje OX, es decir cuando

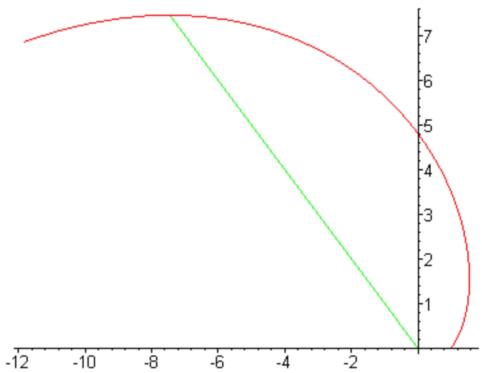
$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = 0.$$

Puesto que la exponencial es siempre mayor que cero la ecuación anterior es equivalente a

$$\sin t = -\cos t$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$



Primer instante de tangente horizontal

2. La distancia recorrida es la longitud del arco de curva que está definida

por la integral

$$\begin{aligned}
L &= \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} \, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} e^t \sqrt{(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t)} \, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} e^t \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt \\
&= \sqrt{2} \int_{t_0}^{t_1} e^t \, dt \\
&= \sqrt{2} \left(e^{t_1} - e^{t_0} \right) \\
&= \sqrt{2} \left(e^{t_1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

3. En el instante t_1 la partícula se encuentra en la posición

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_1) &= e^{t_1} \cos t_1 \, \mathbf{i} + e^{t_1} \sin t_1 \, \mathbf{j} \\
&= e^{t_1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \, \mathbf{i} - \frac{1}{2} \, \mathbf{j} \right).
\end{aligned}$$

La dirección de la tangente en dicho instante es

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t_1) &= e^{t_1}(\cos t_1 - \sin t_1) \, \mathbf{i} + e^{t_1}(\sin t_1 + \cos t_1) \, \mathbf{j} \\
&= e^{t_1} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \, \mathbf{i} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \, \mathbf{j} \right).
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el instante considerado es

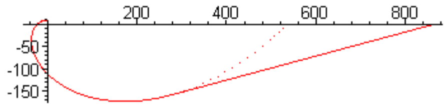
$$\mathbf{r}(t) = e^{t_1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} t \right) \mathbf{i} + e^{t_1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} t \right) \mathbf{j}.$$

Esta recta corta al eje OX cuando

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} t = 0$$

es decir para

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$



Trayectoria a escala natural

Ejercicio 6 *(3 puntos) Encontrar los extremos absolutos de la función*

$$f(x,y) = (x+y-2)^2$$

en la región $D = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$.

Solución:

La región D es un triángulo cerrado y acotado. Analizaremos por separado los puntos del interior y de la frontera.

Interior. Por ser f diferenciable los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(x+y-2) = 0 \\ f_y(x,y) &= 2(x+y-2) = 0 \end{aligned}$$

es decir todos los puntos de la recta

$$x+y-2=0.$$

En consecuencia los puntos críticos pertenecientes a D son los puntos de la recta contenidos en el interior del triángulo

$$C = \{(x,y)/\ y = 2-x,\ 0 < x < 3\}.$$

Frontera Por tratarse de un triángulo la frontera de D está compuesta por sus tres lados.

En el lado $y = x$

$$F_1(x) = f(x,x) = 4(x-1)^2.$$

Derivando resulta

$$F_1'(x) = 8(x-1) = 0.$$

Por tanto F_1 posee un punto crítico el $x = 1$ al que corresponde el punto $(1, 1)$ del triángulo.

En el lado $y = 3$

$$F_2(x) = f(x, 3) = (x + 1)^2.$$

Derivando resulta

$$F_2'(x) = 2(x + 1) = 0$$

No existe ninguna solución que satisfaga $0 < x < 3$ y que pertenezca por tanto al triángulo.

En el lado $x = 0$

$$F_3(y) = f(0, y) = (y - 2)^2.$$

Derivando resulta

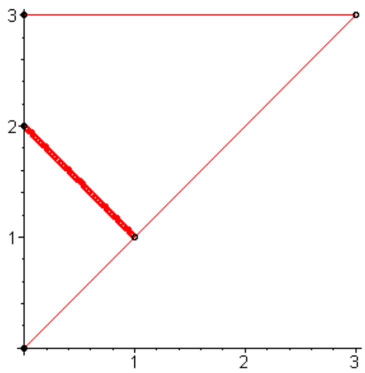
$$F_3'(y) = 2(y - 2) = 0.$$

Por tanto F_3 posee un punto crítico el $y = 2$ al que corresponde el punto $(0, 2)$ del triángulo.

A los dos puntos anteriores pertenecientes a la frontera hay que añadir los tres vértices del triángulo, puntos $(0, 0)$, $(3, 3)$ y $(0, 3)$.

En total se obtienen los puntos

$$\{(x, y)/\ y = 2 - x,\ 0 < x < 3\} \cup \{(1, 1), (0, 2), (0, 0), (3, 3), (0, 3)\}.$$



Puesto que la función f es una función continua y la región D un conjunto cerrado y acotado ha de existir máximo y mínimo absolutos. Estos se alcanzarán necesariamente en alguno de los puntos anteriores. Comparando

x	y	$f(x, y)$
x	$2 - x$	0
0	0	4
1	1	0
3	3	16
0	3	1
0	2	0

observamos que se alcanza máximo absoluto de valor 16 en el punto $(3,3)$ y mínimo absoluto de valor 0 en los puntos $\{(x,y)/\ y = 2-x,\ 0 \leq x \leq 3\}$.