CALCULO 11-M
Números Reales

June Amillo

20de Septiembre del 2000

Contenido

1 La Recta Real·

Esta sección trata de repasar nociones básicas de conjuntos, los números reales y el sistema coordenado que los representa llamado recta real.

1.1 Conjuntos

Un *conjunto* es una coleccion bien definida de objetos. Dichos objetos se llaman *elementos*.

Los conjuntos se representan usualmente con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y sus elementos con letras minúsculas $a, b, c, \ldots$.

Si x es un elemento del conjunto S se dice que x pertenece a S y se escribe

$$x \in S.$$

Por el contrario si x no es un elemento del conjunto S se dice que x no pertenece a S y se escribe

$$x \notin S.$$

Un conjunto se puede definir nombrando cada uno de sus elementos o bien mediante una propiedad que permita decidir si un objeto determinado está en el conjunto o no. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} A &= \{a, e, i, o, u\} \\ &= \{x / \ x \text{ es una vocal}\}. \end{aligned}$$

A continuación recordaremos las siguientes nociones básicas de la teoría de conjuntos necesarias en lo que sigue

1. A es un *subconjunto* de B y se escribe $A \subset B$ sí y solo sí cada elemento de A es a su vez elemento de B.

2. Dos conjuntos A y B son *iguales* sí y solo sí $A \subset B$ y $B \subset A$.

3. La *unión* de A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B incluidos los que pertenecen a ambos;

$$A \cup B = \{x / \ x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

4. La *interseccion* de A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B;

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

5. El *complementario* de A *relativo* a B es conjunto formado por los elementos de B que no están en A

$$B - A = \{x / \ x \in B \text{ y } x \notin A\}.$$

6. Se llama *conjunto vacío* $\emptyset$ al conjunto que no contiene ningún elemento.

1.2 Números reales

Admitimos la existencia de un conjunto que representaremos por $\mathcal{R}$ y cuyos elementos llamaremos *números reales* sobre el que están definidas las operaciones aritméticas básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir.

Suponemos suficientemente conocidas las propiedades de dichas operaciones junto con las reglas de las potencias. Solo recalcar que así como el producto de cualquier número por cero está siempre definido y es cero, no lo está la division por cero. La expresion

$$\frac{a}{0}$$

no está definida y carece de significado.

1.3 Clasificación

Dentro de los números reales distinguiremos diferentes tipos.

1. Los *números naturales* o también *enteros positivos* son los números usados para contar,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

2. Los *enteros negativos* son los números naturales con signo menos,

$$-1, -2, -3, \dots .$$

   Los números enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 forman los *números enteros*

$$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. Los *números racionales* son los números reales que pueden representarse como cociente de dos números enteros m y n, $n \neq 0$

$$Q = \{x \in \mathcal{R} / \ x = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in Z \text{ y } n \neq 0\}.$$

   Todo entero m es un número racional ya que se puede escribir en la forma $m/1$. Ejemplo de números racionales no enteros son

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-9}{5}, \frac{173}{25}, \dots$$

4. Los números *irracionales* son los números reales que no son racionales, es decir a $R - Q$. Ejemplo de números irracionales son los números radicales como $\sqrt{2}$ y $-\sqrt[3]{5}$. También son números irracionales los números transcendentes π y e.

1.4 Representación Decimal

Los números reales se pueden representar en forma decimal mediante un número entero seguido de un punto y de un número infinito de dígitos, por ejemplo

$$2.758095........$$

En esta forma los números racionales se distinguen por un desarrollo con un número finito de dígitos no nulos o bien por un bloque finito de dígitos que se repite periódicamente, p.e.

$$2 = 2.00000000........,$$

$$\frac{1}{4} = 0.25000000........$$

y

$$\frac{1}{3} = 0.33333333........$$

Al efectuar operaciones con números decimales los resultados obtenidos serán aproximados ya que no es posible trabajar con infinitos dígitos. El número de dígitos utilizado para representar un número decimal se conoce como su *precisión*. Por ejemplo, 1.666 representa al número racional $4/3$ con precisión cuatro y 3.14159 representa al número irracional π con precisión seis.

Los números decimales relativamente grandes se suelen escribir en *notación científica*. Esta consiste de un número decimal relativamente pequeño seguido de una potencia positiva de 10, p.e.

$$0.32451 \cdot 10^{24}.$$

La misma notación se usa para números muy pequeños utilizando potencias negativas.

Un Sistema de Computación Matemática (S.C.M.) nos ofrece la posibilidad de trabajar con números exactos o con números decimales. La aritmética realizada con números exactos se llama *aritmética exacta o simbólica* mientras que la efectuada con números decimales se denomina *aritmética aproximada o numérica*. Esta última puede hacerse con cualquier precisión con la única limitación de la capacidad del sistema. Esta capacidad es mucho mayor que la proporcionada por cualquier lenguaje convencional por ello se dice que un S.C.M. permite trabajar con precisión infinita.

1.5 Representación Geométrica

Cada número real se asocia con un *punto* de una recta. Para ello se escoge un punto arbitrario al que se asocia el 0 y al que denominaremos *origen* O. A continuación se escoge otro punto, usualmente a la derecha del anterior al que asociamos el número 1. La distancia entre el 0 y el 1 determina la escala o *unidad de longitud*. Los demás números reales se marcan sobre la recta de acuerdo con esta escala situando los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.

Una recta representando los números reales se conoce como *Recta Real.* Los enteros coinciden con los múltiplos de la unidad de longitud y los racionales con las partes fraccionarias de ella y de sus múltiplos.

Tanto los números racionales como los números irracionales se distribuyen por toda recta de forma que entre dos números reales cualesquiera siempre existen infinitos números racionales e infinitos números irracionales. Esta propiedad se conoce con el nombre de *densidad*.

1.6 Ordenación

Una propiedad importante de los números reales es la de estar *ordenados.* Si un número a es menor que otro b escribiremos $a < b$. Geométricamente distinguimos si un número es menor que otro por su posición sobre la recta real. Si $a < b$ el punto correspondiente al número a se halla situado a la izquierda del correspondiente al número b. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades que suponemos conocidas

Teorema 1 *1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

2. Si $a < b$ y c es un número cualquiera, entonces $a + c < b + c$.

3. *Si* $a < b$ *y* $c > 0$*, entonces* $ac < bc$*.*

4. *Si* $a < b$ *y* $c < 0$*, entonces* $ac > bc$*.*

5. *Si* $0 < a < b$*, entonces* $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$*.*

La relación $a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$. Las propiedades anteriores son válidas si se substituye $a < b$ por $a \leq b$.

Dos errores frecuentes cuando se trabaja con desigualdades son:

1. Multiplicar ambos lados de una desigualdad por una expresión cuyo signo pueda cambiar, por ejemplo $x - 3$, sin tener en cuenta que es necesario cambiar el signo de la desigualdad cuando la cantidad por la que se multiplica sea negativa.

2. Elevar al cuadrado ambos lados de la desigualdad sin tener en cuenta que $a < b$ no implica $a^2 < b^2$. Por ejemplo, $-3 < 2$ pero $(-3)^2 = 9 > 2^2 = 4$.

1.7 Ampliación de la Recta Real

A la recta real es costumbre añadir dos símbolos $+\infty$ y $-\infty$ que se leen más y menos *infinito* respectivamente. Estos dos símbolos no denotan números reales; simplemente permiten escribir ciertas afirmaciones de forma más concisa. Se admiten por convenio las siguientes reglas:

1. Si x es un número cualquiera, entonces $-\infty < x < +\infty$.

2. Si x es un número cualquiera, entonces $x \pm \infty = \pm\infty$ y $x/(\pm\infty) = 0$.

3. Si $x > 0$, entonces $x(\pm\infty) = \pm\infty$.

4. Si $x < 0$, entonces $x(\pm\infty) = \mp\infty$.

5. Así mismo, $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$, $(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$ y $(\pm\infty)(\mp\infty) = \mp\infty$.

1.8 Intervalos

Las desigualdades permiten representar conjuntos de la recta. Conjuntos básicos son los intervalos.

Definición 2 *Sean a y b dos números reales. Se define:*

1. ***Intervalo abierto*** $(a,b) = \{x \in \mathcal{R} / a < x < b\}$.
2. ***Intervalo cerrado*** $[a,b] = \{x \in \mathcal{R} / a \leq x \leq b\}$.
3. ***Intervalo semiabierto*** $[a,b) = \{x \in \mathcal{R} / a \leq x < b\}$.
4. ***Intervalo semiabierto*** $(a,b] = \{x \in \mathcal{R} / a < x \leq b\}$.

En la definición anterior los puntos a y b se conocen como los *extremos* del intervalo. Dichos extremos pueden ser eventualmente $+\infty$ o $-\infty$. En este caso los intervalos se denominan *infinitos*. Por ejemplo,

$$(-\infty, 5] = \{x \in \mathcal{R} / -\infty < x \leq 5\}.$$

1.9 Valor Absoluto

Definición 3 *El **valor absoluto** de un número positivo o cero es el propio número. El valor absoluto de un número negativo es dicho número cambiado de signo.*

El valor absoluto de x se representa por $|x|$. Según la definición

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$ y $|-3| = -(-3) = 3$. El valor absoluto de un número x también se puede calcular mediante la fórmula

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Las siguientes propiedades del valor absoluto son inmediatas:

Teorema 4 1. *$|x| \geq 0$ para todo x.*

2. *$|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.*

3. $|x| = |y|$ *si y sólo si* $x = \pm y$.

4. $|xy| = |x||y|$ *para cualesquiera* x *e* y.

5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *para cualesquiera* x *e* y.

6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

La propiedad 3 del teorema anterior permite describir los intervalos mediante desigualdades con valor absoluto.

Teorema 5 *Principales Desigualdades con valor absoluto*

1. $|x| \leq c$ *si y sólo si* $-c \leq x \leq c$.

2. $|x - c| \leq r$ *si y sólo si* $c - r \leq x \leq c + r$.

3. $|x| > r$ *si y sólo si* $x > r$ *o* $x < -r$.

4. $|x - c| > r$ *si y sólo si* $x > c + r$ *o* $x < c - r$.

5. $0 < |x - c| \leq r$ *si y sólo si* $c - r \leq x < c$ *o* $c < x \leq c + r$.

2 El Plano Cartesiano

2.1 Coordenadas Cartesianas

De la misma forma que hemos asociado a cada punto de la recta un número real a cada punto del plano haremos corresponder un par ordenado de números reales.

Para ello elegimos dos rectas, una horizontal y otra vertical llamadas *ejes* x e y respectivamente. El punto de intersección de ambas se conoce como *origen* O. El conjunto formado por los dos ejes y el origen O se denomina *sistema de coordenadas rectangulares* o *plano cartesiano*.

A cada punto del plano P asociamos un par ordenado (x, y) de números reales. El número x representa la distancia del punto P al eje vertical con signo más o menos según se encuentre a la derecha o izquierda de dicho eje. El número y representa la distancia del punto P al eje horizontal con signo más o menos según se encuentre por encima o por debajo de dicho eje.

El par ordenado (x, y) se llama *coordenadas cartesianas* de P, la primera componente *abcisa* y la segunda *ordenada*.

Los ejes dividen el plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*. Estos cuadrantes se corresponden con los diferentes signos que pueden tomar las coordenadas, primer cuadrante $\{x > 0, y > 0\}$, segundo $\{x < 0, y > 0\}$, tercero $\{x < 0, y < 0\}$ y cuarto $\{x > 0, y < 0\}$.

2.2 Distancia

Si P y Q son dos puntos del plano de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente la *distancia* de P a Q viene dada por la fórmula de Pitágoras

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2.3 Punto Medio

Las coordenadas del *punto medio* del segmento PQ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

En general las coordenadas de cualquier punto del segmento PQ son

$$((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2)$$

donde t es un número real comprendido entre 0 y 1.

2.4 Rectas

Sean P y Q dos puntos del plano de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente. Dichos puntos determinan una línea recta. Supongamos en primer lugar que $x_1 \neq x_2$ lo que corresponde al caso de una recta no vertical. Cualquier punto (x, y) de la recta distinto de P satisface

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y por tanto verifica la ecuación

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Obsérvese que el punto P también satisface esta ecuación. Por consiguiente podemos afirmar que dicha ecuación representa la recta que une los puntos P y Q.

El número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se conoce como *pendiente* de la recta y representa el número de unidades que la recta sube o baja verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha. Con esta notación la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que se conoce como ecuación *punto-pendiente.* Dicha ecuación puede escribirse también en la forma

$$y = mx + b$$

con $b = y_1 - mx_1$. Geométricamente, b representa la ordenada del punto de corte de la recta con el eje OY ya que para $x = 0$ resulta $y = b$.

En el caso de una recta vertical, i.e. $x_1 = x_2$, el número m no está definido. Entonces se conviene en decir que la pendiente es infinita. Cualquier punto de la recta satisface la ecuación

$$x = x_1.$$

En cualquier caso la ecuación de una recta se puede escribir en la forma

$$Ax + By + C = 0$$

llamada *ecuación general* o *implícita* de la recta. Recíprocamente, si A y/o B son distintos de cero los puntos del plano representados por la ecuación anterior forman una línea recta.

2.5 Circunferencias

Una circunferencia de centro $P = (a, b)$ y radio r es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a P es igual a r. Por tanto dichos puntos satisfacen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Efectuando operaciones resulta

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

que es de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación general* o *implícita* de la circunferencia.

Recíprocamente, una ecuación del tipo anterior con $A \neq 0$ representa una circunferencia. El centro y el radio se determinan mediante la *técnica de completar cuadrados.*

Ejemplo 6 *Determinar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0.$$

En primer lugar empezamos agrupando los términos en x

$$(x^2 - x) + y^2 + 3y - 2 = 0.$$

A continuación multiplicamos y dividimos por 2 el coeficiente de x

$$\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x\right) + y^2 + 3y - 2 = 0.$$

Por último se añade a ambos lados de la ecuación el cuadrado del número resultante de dividir por dos el coeficiente de la x, es decir $(1/2)^2$con lo que se obtiene

$$\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + y^2 + 3y - 2 = \frac{1}{4}.$$

La expresión entre paréntesis es ahora un cuadrado perfecto por lo que se puede escribir

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 3y - 2 = \frac{1}{4}.$$

Procediendo de la misma forma con los términos en y resulta

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}.$$

Por último agrupando los términos independientes a la derecha del signo igual y simplificando se obtiene

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}.$$

Esta ecuación se corresponde con la ecuación de una circunferencia de centro

$$C=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

y radio

$$r=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad \blacksquare$$

No siempre una ecuación cuadrática del tipo descrito anteriormente representa a una circunferencia. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+y^2=0$$

solo es satisfecha por el punto $(0,0)$ y la ecuación

$$x^2+y^2+1=0$$

no es satisfecha por ninguno.

2.6 Cónicas

En geometría elemental las cónicas son las secciones resultantes de cortar un cono doble circular recto por un plano que no pase por su vértice. Aquí las definiremos de forma analítica.

Mediante las cónicas es posible describir el movimiento de objetos tan diferentes como los planetas, los satélites o los electrones.

2.6.1 Elipses

La *elipse* se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante y mayor que la distancia entre dichos puntos. Los puntos fijos se llaman *focos* y la recta que los une *eje focal.*

Supondremos que el eje focal coincide con el eje OX y que los focos se encuentran situados simétricamente a un lado y a otro del origen de coodenadas. En esta situación diremos que la elipse se encuentra en posición estándar.

Sean $(\pm c, 0)$ las coordenadas de los focos y tomemos la constante igual a $2a$. Un punto arbitrario (x, y) de la elipse habrá de verificar la ecuación

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Pasando el segundo sumando del lado izquierdo al derecho y elevando al cuadrado se obtiene

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Simplificando y aislando la raíz cuadrada resulta

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Elevando al cuadrado otra vez y simplificando se obtiene

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Por último dividiendo por $a^2(a^2-c^2)$ resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

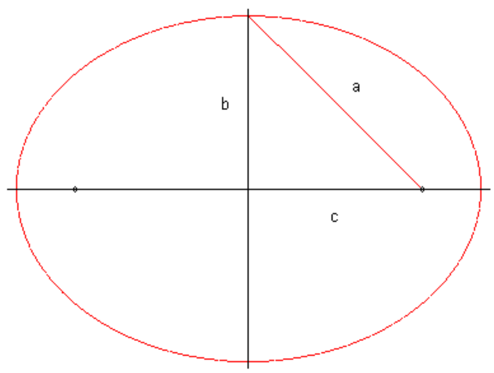
Según la definición de elipse, la constante $2a$ debe ser mayor que la distancia entre los focos $2c$. Por tanto, $a > c$. Tomando

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

la ecuación de la elipse se reduce a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La ecuación anterior muestra que la elipse es simétrica con respecto del origen y respecto de ambos ejes. La elipse corta los ejes en los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$. Estos puntos cuatro puntos se denominan *vértices* y los números a y b *semiejes*. Puesto que $a > b$ la distancia entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ es mayor que la que hay entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$. El eje que une los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se denomina *eje mayor* y es precisamente el eje que contiene a los focos. El eje que une los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se denomina *eje menor*. El punto donde se cortan los ejes se llama *centro* de la elipse.



2.6.2 Hipérbolas

La *hipérbola* se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante y menor que la distancia entre dichos puntos. Los puntos fijos se llaman *focos* y la recta que los une *eje focal*.

Como en el caso de la elipse supondremos que el eje focal coincide con el eje OX y que los focos se encuentran situados simétricamente a un lado y a otro del origen de coodenadas. En esta situación diremos que la hipérbola se encuentra en posición estándar.

Sean $(\pm c, 0)$ las coordenadas de los focos y tomemos la constante igual a $2a$. Un punto arbitrario (x, y) de la hipérbola habrá de verificar la ecuación

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Procediendo de forma análoga al caso de la elipse se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Según la definición de hipérbola, la constante $2a$ debe ser menor que la distancia entre los focos $2c$. Por tanto, $a < c$. Tomando

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

la ecuación de la hipérbola se reduce a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

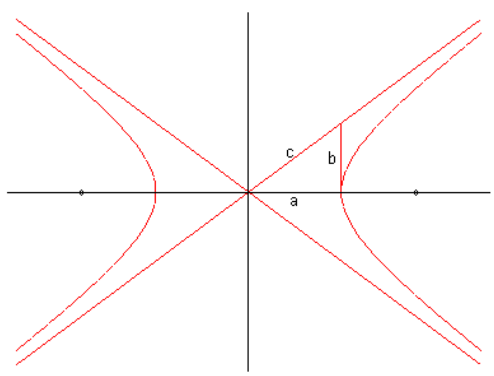
La ecuación anterior muestra que la hipérbola es simétrica con respecto del origen y respecto de ambos ejes. La hipérbola corta al eje OX en los puntos $(\pm a, 0)$. Estos puntos constituyn los *vértices* de la hipérbola. Una hipérbola en posición estándar no tiene puntos de intersección con el eje OY. Las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

que se obtienen como solución de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

se denominan *asíntotas* de la hipérbola. El punto donde se cortan las asíntotas se llama *centro* de la hipérbola.



2.6.3 Parábolas

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

Supondremos que el foco está situado sobre el eje OX, que la directriz es perpendicular a dicho eje y que foco y directriz se encuentran situados simétricamente a derecha e izquierda del origen de coodenadas. Consideraremos ésta como la posición estándar de una parábola.

Sea $(c, 0)$ el foco y $x = c$ la recta directriz. Un punto arbitrario (x, y) de la parábola ha de satisfacer la condición

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c| \, .$$

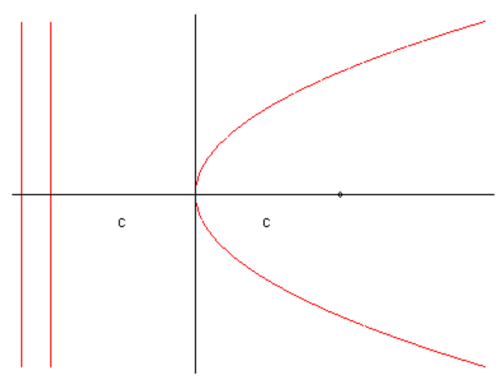
Elevando al cuadrado y simplificando resulta

$$y^2 = 4cx.$$

Llamando p a la distancia del foco a la recta se tiene

$$y^2 = 2px.$$

En su posición estándar la parábola es simétrica respecto del eje OX y se encuentra situada enteramente sobre el semiplano $x \geq 0$. El origen es el único punto de intersección de la parábola con los ejes y se llama *vértice*.



2.7 Gráfica de una Ecuación

Hemos visto como las rectas, las circunferencias y las cónicas pueden ser representadas mediante una ecuación en x e y. En general, si $f(x, y)$ es una expresión en x e y el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen la ecuación

$$f(x, y) = 0$$

constituye una curva. La ecuación se conoce como *ecuación implícita de la curva*.

Las curvas pueden ser representadas mediante la *técnica de marcar puntos*. Esta técnica consiste en tabular una colección de puntos que satisfagan dicha ecuación, representarlos en el plano y unirlos mediante trazos suaves. Un SCM es capaz de generar el número suficiente de puntos para representar fielmente una curva definida de forma implícita.