Funciones de Varias Variables

June Amillo

30/04/00

Contenido

1 Funciones Reales de Varias Variables

1.1 Definiciones

Existen magnitudes que dependen de dos o más magnitudes independientes. Por ejemplo, el área de un rectángulo depende de la longitud de cada uno de sus lados, el volumen de un paralelepípedo rectangular depende de la longitud de cada una de sus aristas, etc. Es por ello necesario considerar un nuevo tipo de funciones cuyas entradas estén constituidas por dos o más valores.

Definición 1 *Se llama* ***función real de*** n***-variables*** *a toda aplicación con valores reales cuyo dominio sea un conjunto* D *del espacio euclídeo* n*-dimensional* $\mathcal{R}^n$*. Es decir se trata de un proceso* f *que asigna a cada* n*-tupla o vector de* n *componentes reales,* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots ,x_n)$*, un número real* y*, escribiéndose*

$$y = f(x_1, \ldots ,x_n)$$

o en notación vectorial

$$y = f(\mathbf{x}).$$

Las componentes $x_1, \ldots , x_n$ del vector $\mathbf{x}$ se conocen como *variables independientes* y el número real y como *variable dependiente.*

En el caso de funciones de dos variables, es decir para $n = 2$, se acostumbra escribir

$$z = f(x, y)$$

en vez de $y = f(x_1, x_2)$. Para funciones de tres variables, $n = 3$, se escribe

$$w = f(x, y, z)$$

en vez de $y = f(x_1, x_2, x_3)$.

Lo mismo que en las funciones de una variable las funciones de varias variables pueden definirse mediante una expresión simbólica que las contenga o mediante un algoritmo. Por ejemplo, la expresión

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

define una función de dos variables la cual representa el cuadrado de la distancia de un punto del plano al origen de coordenadas. La expresión

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

representa la versión de la función anterior para tres variables, y la expresión

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

la correspondiente a n variables en general.

1.2 Representación Gráfica

1.2.1 Funciones de dos variables

Gráficamente una función de dos variables se puede representar de dos formas diferentes, o bien como una superficie en el espacio de tres dimensiones o bien como un conjunto de curvas en el plano.

Definición 2 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables y dominio D. Se llama **gráfica** de f al conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ tales que $(x, y) \in D$ y*

$$z = f(x, y).$$

La gráfica de una función de dos variables puede interpretarse como una superficie en el espacio de tres dimensiones cuya proyección sobre el plano XY es el dominio D de la función.

Lo mismo que no todas las curvas del plano pueden ser descritas como la gráfica de una función $y = f(x)$ no todas las superficies pueden ser representadas como la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Como en aquel caso las superficies deben satisfacer el test de la vertical, es decir que las verticales correspondientes a cada punto del dominio solo pueden cortar a la gráfica en un solo punto. Por ejemplo, una esfera es una superficie en el espacio de tres dimensiones que no puede ser representada como la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

Definición 3 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables y dominio $D \subset \mathcal{R}^2$. Se llaman* ***curvas de nivel*** *de f a las curvas del plano formadas por los puntos $(x, y) \in D$ tales que f toma un valor constante $f(x, y) = k$. Las curvas del espacio obtenidas al cortar la superficie $z = f(x, y)$ con los planos $z = k$ se conocen como* ***líneas de contorno****.*

Las líneas de contorno son curvas del espacio contenidas en un plano $z = k$ paralelo al plano x, y. Las curvas de nivel son la proyección ortogonal de las líneas de contorno sobre el plano x, y.

1.2.2 Funciones de tres variables

La representación de una función de tres variables se puede realizar mediante las superficies de nivel $f(x, y, z) = k$ formadas por los puntos $(x, y, z) \in D$ tales que f toma el valor constante k.

Intentar representar para una función $f(x, y, z)$ de tres variables y dominio D el conjunto de los puntos $(x, y, z, f(x, y, z))$, $(x, y, z) \in D$, requiere trabajar en el espacio de cuatro dimensiones. Utilizando un SCM la cuarta dimensión puede ser visualizada mediante el color.

2 Límites y Continuidad

2.1 Límites

La idea de límite de una función de varias variables es análoga al caso de una variable. Dada una función de dos variables $f(x, y)$ diremos que f tiene límite L en (a, b) si para valores de las entradas (x, y) cada vez más próximos a (a, b) la función toma valores de salida $f(x, y)$ cada vez más próximos a l.

Entendiendo la noción de proximidad entre los puntos (x, y) y (a, b) en el sentido de la distancia euclídea entre dichos puntos y siguiendo el paralelismo con las funciones de una variable se establece la siguiente definición formal de límite de una función de dos variables:

Definición 4 *Sea $f(x,y)$ una función real de dominio $D \subset \mathcal{R}^2$, $(a,b) \in \mathcal{R}^2$ y L un número real. Supongamos que todo disco perforado centrado en (a,b) corta a D. Se dice que f tiene **límite** L en (a,b) sí y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $(x,y) \in D$ y*

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

se verifica

$$|f(x,y) - L| < \epsilon.$$

La definición anterior es válida para todos los puntos interiores del dominio D. También lo es en los puntos frontera del dominio siempre que no estén aislados, i.e. exista un disco que no contenga otros puntos de D que el propio punto (a,b).

Como en el caso de una variable si el límite existe es único. En este caso se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

2.2 Límites Direccionales

Para determinar el límite de una función de una variable basta con comprobar qué ocurre al aproximarnos por la derecha y por la izquierda. Si los límites por la derecha e izquierda existen y coinciden podemos concluir que el límite existe. Por el contrario si alguno de los límites laterales no existe o no coinciden entre sí podemos asegurar que el limite no existe.

En el caso de una función de varias variables la idea de límite lateral es substituida por la de límite direccional o límite según rectas. Sea

$$x = a + mt \ ; \ y = b + nt$$

una recta que pasa por el punto (a,b). La función $f(x,y)$ sobre dicha recta toma los valores $F(t) = f(a+mt, b+nt)$. Cuando el punto (x,y) tiende hacia el punto (a,b) siguiendo dicha recta el límite de $f(x,y)$ se reduce al límite de $F(t)$ cuando t tiende hacia cero que es un límite de una variable.

Definición 5 *Sea $f(x,y)$ una función real de dominio $D \subset \mathcal{R}^2$ y Γ la recta de dirección $\mathbf{v} = (m,n)$ que pasa por el punto $(a,b) \in \mathcal{R}^2$. Supongamos que* *todo disco perforado centrado en* (a,b) *corta a* D *y a* Γ*. Se llama* ***límite direccional*** *de* f *en* (a,b) *según* $\mathbf{v}$ *al límite*

$$\lim_{t\to 0} f(a+mt, b+nt).$$

Resulta claro que si $f(x,y)$ posee límite L cuando (x,y) tiende hacia (a,b) existirán los límites direccionales en cualquier dirección (m,n) y todos ellos habrán de ser iguales a L.

Teorema 6 *Sea* $f(x,y)$ *una función real de dominio* $D \subset \mathcal{R}^2$ *y* Γ *la recta de dirección* $\mathbf{v} = (m,n)$ *que pasa por el punto* $(a,b) \in \mathcal{R}^2$*. Supongamos que todo disco perforado centrado en* (a,b) *corta a* D *y a* Γ*. Si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

el límite direccional de f *en* (a,b) *según* $\mathbf{v}$ *existe y coincide con* L*, i.e.*

$$\lim_{t\to 0} f(a+mt, b+nt) = L.$$

Por tanto si el límite no existiera en alguna dirección o encontráramos dos direcciones que proporcionaran límites diferentes podremos asegurar que la función $f(x,y)$ no tiene límite.

Por el contrario, el hecho de que todos los límites direccionales existan y sean iguales no permite asegurar que exista el límite de f. En este caso pueden existir otras trayectorias, como parábolas o curvas más complicadas a lo largo de los cuales el límite no exista o sea diferente de los previamente obtenidos.

2.3 Continuidad

La definición de continuidad para funciones de dos variables es análoga a la de una variable.

Definición 7 *Sea* $f(x,y)$ *una función real con dominio* $D \subset \mathcal{R}^2$*. Se dice que* f *es* ***continua*** *en* (a,b) *sí y solo sí:*

1. f *está definida en* (a,b)*, i.e.* $(a,b) \in D$*;*
2. *Existe límite de* f *cuando* (x,y) *tiende a* (a,b)*; y*

3. Se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Una función es *continua* en un conjunto $S \subset D$ si es continua en cada punto de S. Una función se dice que es *continua* si es continua en cada punto de su dominio D. Cuando una función no sea continua en un punto perteneciente a su dominio diremos que es *discontinua* en dicho punto. Las funciones de una variable continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ cumplen la propiedad de los valores extremos, i.e. alcanzan un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto al menos una vez en dicho intervalo. Lo mismo es verdad para funciones de dos variables continuas en un conjunto K del plano que sea cerrado y acotado.

Teorema 8 (Propiedad de los valores extremos) *Sea $f(x,y)$ una función real definida en un conjunto $K \subset \mathcal{R}^2$ cerrado y acotado. Si f es continua en K, entonces f alcanza máximo y mínimo absoluto en dicho conjunto.*

2.4 Funciones de Tres o Más Variables

Las definiciones de límite y continuidad se generalizan fácilmente a tres o más variables con ligeros cambios. Utilizando notación vectorial y usando la fórmula de la distancia euclídea

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

dichas definiciones se pueden reescribir de forma que sean válidas para cualquier dimensión.

Definición 9 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función real de dominio $D \subset \mathcal{R}^n$, L un número real y $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$. Supongamos que toda bola perforada centrada en $\mathbf{a}$ corta a D. Se dice que f tiene* ***límite*** *L en $\mathbf{a}$ sí y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in D$ y*

$$0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta$$

se verifica

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon.$$

Definición 10 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función real de dominio $D \subset \mathcal{R}^n$ y $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$. Sea $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^n$ y $\Gamma = \{\mathbf{a} + t\mathbf{v}/t \in \mathcal{R}\}$. Supongamos que toda bola perforada centrada en $\mathbf{a}$ corte a $D \cap \Gamma$. Se llama **límite direccional** de f en $\mathbf{a}$ según $\mathbf{v}$ al siguiente límite*

$$\lim_{t \to 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}).$$

Definición 11 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función real con dominio $D \subset \mathcal{R}^n$. Se dice que f es **continua** en $\mathbf{a}$ sí y solo sí:*

1. *f está definida en (a, b), i.e. $\mathbf{a} \in D$;*
2. *Existe límite de f cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{a}$; y*
3. *Se verifica*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

3 Derivadas Parciales

Esta sección generaliza la noción de derivada a funciones de dos o más variables. Las derivadas parciales permiten estudiar el efecto que se produce en un proceso al variar una variable independiente manteniendo fijas las demás.

3.1 Funciones de Dos Variables

Para una función de dos variables definiremos dos derivadas, una para cada variable independiente. Estas derivadas se definen como límite de un cociente incremental en cada una de las variables.

Definición 12 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto. Se llama **derivada parcial** respecto de x en (a, b) al límite siguiente cuando exista*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

*Análogamente se llama **derivada parcial** respecto de y en (a, b) al límite siguiente cuando exista*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

Otras notaciones frecuentes para la derivada parcial respecto de x en (a,b) son

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}\ ,\ f_x(a,b) \text{ o } D_1f(a,b)$$

y para la derivada parcial respecto de y

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}\ ,\ f_y(a,b) \text{ o } D_2f(a,b).$$

De acuerdo con la definición y la derivada parcial respecto de x en (a,b) es un número. Este número representa:

1. La razón de cambio de la variable dependiente $z = f(x,y)$ cuando x varía e y se mantiene constante.

2. La pendiente de la tangente a la curva del plano $y = b$ obtenida como intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con dicho plano.

De la misma forma, la derivada parcial respecto de y en (a,b) es un número que representa:

1. La razón de cambio de la variable dependiente $z = f(x,y)$ cuando y varía y x se mantiene constante.

2. La pendiente de la tangente a la curva del plano $x = a$ obtenida como intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con dicho plano.

Si consideramos todos los puntos $(x,y) \in D$ para los cuales existe derivada parcial respecto de x podemos interpretar la derivada parcial en (x,y) como una función. Dicha función se denota de diferentes formas

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ f_x\ ,\ D_1f \text{ o } z_x.$$

Para calcular una expresión de dicha derivada parcial se considera y como constante y se deriva la expresión de $f(x,y)$ respecto de x como si fuera una función de una sola variable. Análogamente, si consideramos todos los puntos $(x,y) \in D$ para los cuales existe derivada parcial respecto de y podemos

podemos interpretar la derivada parcial en (x, y) como una función. Dicha función se denota de diferentes formas

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} \ , \ f_y \ , \ D_2 f \text{ o } z_y.$$

Para calcular una expresión de dicha derivada parcial se considera x como constante y se deriva la expresión de $f(x, y)$ respecto de y como si fuera una función de una sola variable.

3.2 Derivadas Parciales de Orden Superior

Una función de dos variables $z = f(x, y)$ da lugar a dos derivadas parciales o derivadas primeras. Estas son a su vez funciones de dos variables que puede ser derivadas nuevamente para dar lugar a las cuatro *derivadas segundas* siguientes:

1. Derivada segunda respecto de x dos veces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_{11} f.$$

2. Derivada segunda primero respecto de x y después respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{12} f.$$

3. Derivada segunda primero respecto de y y después respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D_{21} f.$$

4. Derivada segunda respecto de y dos veces

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D_{22} f.$$

Las derivadas f_{yx} y f_{xy} se llaman derivadas cruzadas. Frecuentemente, estas derivadas son iguales como indica el siguiente teorema.

Teorema 13 (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas) *Si $f(x,y)$ una función real de dos variables tal que f, f_x, f_y, f_{yx} y f_{xy} son continuas en un abierto R. Entonces,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Las cuatro derivadas segundas dan lugar a ocho derivadas terceras, éstas a dieciséis derivadas cuartas y así sucesivamente.

3.3 Funciones de Tres o Más Variables

En el caso de una función $f(x,y,z)$ de tres variables existen tres derivadas parciales. En el caso general de una función $f(x_1,\ldots,x_n)$ de n variables existen n derivadas parciales. Todas ellas se definen se definen de forma análoga al caso de dos variables como el cociente incremental resultante al variar una determinada variable y mantener constantes las demás.

Definición 14 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función con dominio $D \subset \mathcal{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ se llama* ***derivada parcial*** *i**-ésima** de f en $\mathbf{a}$ al límite siguiente cuando exista*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

La derivada parcial i-ésima se representa también mediante

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{a}}, \ f_{x_i}(\mathbf{a}) \text{ o } D_i f(\mathbf{a}).$$

Las derivadas parciales de orden superior se definen de forma análoga al caso de dos variables.

4 Diferenciabilidad

Esta sección generaliza el concepto de diferencial en el sentido de aproximación lineal o linealización a funciones de dos o más variables. La principal diferencia con el cálculo de una variable está en el hecho de que la existencia de derivadas y la diferenciabilidad no son conceptos equivalentes para varias variables.

4.1 Funciones de Dos Variables

Sea $y = f(x)$ una función de una variable diferenciable en a y

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

la correspondiente aproximación lineal. Al pasar del punto a al punto $x = a + h$, la diferencia o error $r(h)$ entre $f(x)$ y $L(x)$ es

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a)h.$$

Dicha diferencia satisface la condición

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

lo que justifica la aproximación $f(x) \approx L(x)$ para valores pequeños de h.

En el caso de una función de dos variables $z = f(x, y)$ con derivadas parciales en un punto (a, b) parece natural tomar como aproximación lineal la función

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Al pasar de un punto (a, b) al punto $(x, y) = (a + h, b + k)$ la diferencia o error $r(h, k)$ entre $f(a, b)$ y $L(x, y)$, viene dada por

$$\begin{aligned} r(h,k) &= f(a + h, b + k) - L(a + h, b + k) \\ &= f(a + h, b + k) - f(a, b) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k\right). \end{aligned}$$

Desafortunadamente, la existencia de derivadas parciales no garantiza que la función error satisfaga necesariamente la condición

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

que permitiría justificar la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ para valores pequeños de h y k. Por ello, si queremos asegurarnos un buen comportamiento de la aproximación lineal, será necesario exigirla como condición de diferenciabilidad junto con la existencia de derivadas parciales.

Definición 15 *Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto y $(a,b) \in D$. Decimos que f es* ***diferenciable*** *en (a,b) sí y solo sí se verifica:*

1. *Existen las derivadas parciales*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

2. *La función*
$$r(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, k \right)$$
satisface la condición
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente de diferenciabilidad para una función de dos variables aplicable en un gran número de casos.

Teorema 16 (Condición suficiente de diferenciabilidad) *Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables con derivadas parciales f_x y f_y continuas en una región R abierta incluida en su dominio. En estas condiciones, la función f es diferenciable en todos los puntos de R.*

Al igual que para funciones de una variable diferenciabilidad implica continuidad.

Teorema 17 *Sea $z = f(x,y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto, diferenciable en $(a,b) \in D$. Entonces, f es continua en dicho punto.*

Definición 18 *Sea $z = f(x,y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto, diferenciable en $(a,b) \in D$. Se llama* ***linealización*** *o aproximación lineal de f en (a,b) a la función lineal*
$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

La gráfica de la linealización de f en el punto (a, b) es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en dicho punto. En las proximidades del punto (a, b) el valor de $f(x, y)$ es aproximadamente igual al de $L(x, y)$. Esto permite decir que la gráfica de una función diferenciable de dos variables es localmente plana.

Definición 19 *Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto, diferenciable en $(a, b) \in D$. Se llama **diferencial** de las variables independientes x e y y se representan por dx y dy respectivamente, a cualquier incremento de dichas variables. Se llama **diferencial total** de la variable independiente z y se representa por dz a*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, dy$$

La diferencial dz representa el incremento experimentado por la linealización L al pasar del punto (a, b) al $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Para incrementos pequeños Δx y Δy, el incremento total de z es aproximadamente igual a dz, i.e.

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \approx dz.$$

4.2 Funciones de Tres o Más Variables

Los conceptos de diferenciabilidad, diferencial y linealización se extienden sin ninguna dificultad del caso de funciones dos variables al de funciones de tres o más variables.

Definición 20 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función real de dos variables con dominio $D \subset \mathcal{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} \in D$. Decimos que f es **diferenciable** en $\mathbf{a}$ sí y solo sí se verifica:*

1. *Existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

2. *La función*

$$r(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i$$

satisface la condición

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0$$

siendo $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ *y*

$$||\mathbf{h}|| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}.$$

Al igual que para dos variables la existencia y continuidad de las derivadas parciales en una región R abierta asegura la diferencibilidad de f en todo punto de R. Así mismo diferenciabilidad de f en $\mathbf{a}$ implica continuidad de f en $\mathbf{a}$. Se llama **diferencial** de cada variable independiente x_i y se representa por dx_i, a cualquier incremento en dicha variable. La **diferencial total** de $y = f(\mathbf{x})$ se define mediante

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, dx_i.$$

Por otra parte, la **linealización** o aproximación lineal de f en el punto $\mathbf{a}$ es la función lineal

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,(x_i - a_i).$$

En concreto, para una función $w = f(x,y,z)$ de tres variables la diferencial de f en un punto (a,b,c) toma la forma

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\, dz$$

y la linealización correspondiente es

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= f(a,b,c) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\,(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\,(z-c). \end{aligned}$$

5 Regla de la Cadena

La regla de la cadena para funciones de una variable establece que si $y = f(x)$ y $x = x(t)$ entonces,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Intentamos generalizar esta regla de derivación a funciones de dos o más variables. En primer lugar estableceremos la regla de la cadena en dos casos particulares y después en general. Por último examinaremos la aplicación de la regla de la cadena para obtener derivadas de funciones definidas implícitamente.

5.1 Regla de la Cadena para dos Variables

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. En primer lugar consideramos el caso en la que cada una de sus variables x e y son a su vez funciones de una variable independiente t con lo que

$$z = f(x(t), y(t))$$

será una función de t. Las variables x e y se denominan variables intermedias y la variable t variable final.

Teorema 21 (Dos variables intermedias y una final) *Sea*

$$z = f(x, y)$$

una función de dos variables diferenciable. Supongamos que

$$x = x(t) \text{ e } y = y(t)$$

son funciones de t diferenciables. Entonces, z es una función de t diferenciable y se verifica

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ahora supongamos que cada una de las variables x e y son a su vez funciones de dos variables independientes r y t con lo que

$$z = f(x(r, t), y(r, t))$$

será una función de r y t.

Teorema 22 (Dos variables intermedias y dos finales) *Sea*

$$z = f(x, y)$$

una función de dos variables diferenciable. Supongamos que

$$x = x(r, t) \text{ e } y = y(r, t)$$

son funciones de r y t diferenciables. Entonces, z es una función de r y t diferenciable verificando

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

5.2 Forma General de la Regla de la Cadena

Sea $z = f(y_1, \ldots, y_m)$ una función de m variables en la que cada variable es función de una sola variable independiente x. En consecuencia z será una función

$$z = f(y_1(x), \ldots, y_m(x))$$

de la variable x.

Teorema 23 (m variables intermedias y una final) *Sea*

$$z = f(y_1, \ldots, y_m)$$

una función diferenciable de m variables. Supongamos que

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$$

son funciones de x diferenciables. Entonces, z es una función de x diferenciable y se verifica

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dx}.$$

Ahora consideramos una función $z = f(y_1, \ldots, y_m)$ de m variables en la que cada variable es a su vez función de n variables $x_1, \ldots, x_n$. En consecuencia z será una función

$$z = f(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$$

de las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Teorema 24 (m variables intermedias y n finales) *Sea*

$$z = f(y_1, \ldots, y_m)$$

una función diferenciable de m variables. Supongamos que

$$y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = y_m(x_1, \ldots, x_n))$$

son funciones diferenciables de n variables. Entonces, z es una función de las variables $x_1, \ldots, x_n$ diferenciable y para cada $i = 1, \ldots, n$ se verifica

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

5.3 Derivación Implícita

Supongamos que la ecuación $f(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x, i.e. $y = y(x)$ y $f(x, y(x)) = 0$. Supongamos además que dicha función $y(x)$ sea diferenciable. Aplicando la regla de la cadena a la última ecuación tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Puesto que $dx/dx = 1$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

y despejando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

siempre que $f_y \neq 0$. Esta fórmula permite calcular la derivada de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 0$. Ahora bien, ¿cuando podemos asegurar que existe dicha función? Además si existe, ¿será diferenciable? La respuesta a estas preguntas junto con la fórmula de la derivada antes obtenida forman parte del siguiente teorema cuya demostración pertenece a un curso de análisis avanzado. Antes de enunciar dicho resultado, observemos que si existe una función $y = g(x)$ satisfaciendo la ecuación $f(x, y) = 0$, la gráfica de g habrá de ser un arco de la curva definida por f que cumpla el test de la vertical. Puesto que la curva $f(x, y) = 0$ puede no satisfacer dicho test, la gráfica de g será a lo sumo una rama de dicha curva. En consecuencia existirán diferentes funciones implícitas dependiendo del punto (a, b) de la curva que consideremos pudiendo ocurrir que alrededor de algún punto no exista ninguna implícita. Dicho de otro modo, la existencia de la función implícita es de carácter local. Por ejemplo, sea

$$f(x, y) = x - y^2.$$

La curva definida por la ecuación $f(x, y) = 0$ es la parábola $y^2 = x$. La rama positiva de dicha parábola define una función implícita $y = \sqrt{x}$ alrededor de cualquier punto (a, a^2), $a \neq 0$. Así mismo, la rama negativa de dicha parábola define una función implícita $y = -\sqrt{x}$ alrededor de cualquier punto $(a, -a^2)$, $a \neq 0$. Por el contrario no existe ninguna rama de la parábola que defina una función implícita alrededor del punto $(0, 0)$.

Teorema 25 (De la función implícita) *Sea $f(x, y)$ una función de dos variables con derivadas parciales continuas en una región abierta R y $(a, b) \in R$. Supongamos:*

1. *$f(a, b) = 0$; y*
2. *$f_y(a, b) \neq 0$.*

Entonces, existen un entorno U de a, un entorno V de b y una única función g de U en V tal que $f(x, g(x)) = 0$. Además, g es diferenciable y

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

De la misma forma, supongamos que la ecuación

$$f(x, y, z) = 0$$

define a z como función implícita de x e y, i.e. $z = z(x, y)$ y

$$f(x, y, z(x, y)) = 0.$$

Supongamos además que dicha función $z(x, y)$ sea diferenciable. Derivando la última ecuación respecto de x y utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Puesto que $\partial x/\partial x = 1$ y $\partial y/\partial x = 0$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Por lo que despejando se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$$

siempre que $f_z \neq 0$. Análogamente, derivando respecto de y y operando resulta

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

siempre que $f_z \neq 0$.

Teorema 26 (De la función implícita) *Sea $f(x, y, z)$ una función de tres variables con derivadas parciales continuas en una región abierta R y $(a, b, c) \in R$. Supongamos:*

1. *$f(a, b, c) = 0$; y*

2. *$f_z(a, b, c) \neq 0$.*

Entonces, existen un entorno U de a, un entorno V de b, un entorno W de c y una única función g de $U \times V$ en W tal que $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Además, g es diferenciable y sus derivadas satisfacen

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}.$$

Este procedimiento para obtener las derivadas de funciones definidas implícitamente se extiende de forma análoga a cualquier número de variables. Así mismo, el teorema de existencia local y diferenciablidad de las funciones implícitas. Incluimos el enunciado para una función implícita.

6 Derivadas Direccionales. Gradiente

6.1 Derivadas Direccionales

Si $z = f(x, y)$ la derivada parcial f_x mide la rapidez con la que z cambia cuando variamos el punto (x, y) en una dirección paralela al eje x. De la misma forma, la derivada parcial f_y mide la rapidez con la que z cambia cuando variamos el punto (x, y) en una dirección paralela al eje y. Ahora bien, ¿cuál es la rapidez con la que z cambia cuan de un vector $\mathbf{u} = (m, n)$? Mover el punto en dicha dirección supone variar (x, y) según la recta $x = a+mt, y = b+nt$. A lo largo de dicha recta z toma los valores $f(a+mt, b+nt)$, i.e. z es una función de t. Se trata por tanto de medir la razón de cambio de dicha función respecto de t.

Definición 27 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto, $(a, b) \in D$ y $\mathbf{u} = (m, n)$ un vector unitario del plano. Se llama* ***derivada direccional*** *de f en (a, b) según $\mathbf{u}$ al límite siguiente cuando exista*

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + mt, b + nt) - f(a, b)}{t}.$$

Haciendo

$$F(t) = f(a + mt, b + nt)$$

se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = F'(0).$$

Suponiendo f diferenciable y aplicando la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + mt, b + nt)\,m + \frac{\partial f}{\partial y}(a + mt, b + nt)\,n. \end{aligned}$$

Y particularizando para $t = 0$ se obtiene

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,m + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,n.$$

Teorema 28 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto. Sea f diferenciable en $(a, b) \in D$ y $\mathbf{u} = (m, n)$ un vector unitario del plano. Entonces,*

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,m + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,n.$$

Según este resultado y la definición de diferencial podemos también decir que la derivada direccional de f según el vector unitario $\mathbf{u} = (m, n)$ es el valor que la diferencial de f en (a, b) toma para $h = m$ y $k = n$. Por otra parte, como se verá en los ejercicios una función puede poseer derivada direccional en todas las direcciones y no ser diferenciable.

6.2 Vector Gradiente

La expresión de la derivada direccional recuerda la de un producto escalar. En concreto, el producto escalar del vector (m, n) y el vector (f_x, f_y).

Definición 29 *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto y derivadas parciales en el punto $(a, b) \in D$. Se llama* ***vector gradiente*** *de f en (a, b) y se denota por $\nabla f(a, b)$ al vector del plano de componentes $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$, es decir*

$$\boldsymbol{\nabla} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathbf{j}.$$

Según esta definición es posible escribir

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \boldsymbol{\nabla} f(a,b) \cdot \mathbf{u}.$$

El vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se representa sobre el dominio de la función f con origen en el punto (a, b). Si representamos el vector direccional $\mathbf{u}$ con origen en dicho punto y α es el ángulo formado por los vectores $\nabla f(a, b)$ y $\mathbf{u}$ se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = ||\boldsymbol{\nabla} f(a,b)|| \cos \alpha.$$

De dicha fórmula se deducen las siguientes propiedades que permiten dar una interpretación geométrica del vector gradiente.

Teorema 30 (Significado del gradiente) *Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con dominio D abierto, diferenciable en $(a, b) \in D$. Supongamos que $\nabla f(a, b) \neq 0$. Entonces,*

1. *La dirección del gradiente $\nabla f(a, b)$ es la dirección en la cual la derivada direccional de f en (a, b) es máxima. El valor máximo de la derivada direccional de f en (a, b) es $||\nabla f(a, b)||$.*

2. *La dirección $-\nabla f(a, b)$ es la dirección en la cual la derivada direccional de f en (a, b) es mínima. El valor mínimo de la derivada direccional de f en (a, b) es $-||\nabla f(a, b)||$.*

3. *El vector gradiente $\nabla f(a, b)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (a, b).*

Las propiedades anteriores pueden ser visualizadas imaginando la superficie $z = f(x, y)$ como la ladera de una montaña. El vector gradiente apunta en la dirección de una brújula que señalara la dirección de máxima pendiente.

La dirección opuesta a la indicada por la brújula es la dirección de más rápido descenso y seguir cualquier dirección perpendicular supone permanecer a la misma altitud.

Por último la propiedad del gradiente de ser normal a las curvas de nivel puede ser utilizada para escribir la ecuación de la tangente en un punto a una curva definida mediante una ecuación implícita. En efecto, sea la curva descrita por la ecuación $f(x,y)=0$ y (a,b) un punto de dicha curva. Si (x,y) es un punto cualquiera de la tangente a la curva que pasa por (a,b) el vector $(x-a,y-b)$ será ortogonal al vector gradiente $\nabla f(a,b)$. En consecuencia, la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)=0$$

representa la recta tangente a la curva $f(x,y)=0$ en el punto (a,b).

6.3 Funciones de Tres Variables

Los conceptos de derivada direccional y vector gradiente pueden ser generalizados a tres o más variables sin ninguna dificultad. A continuación resumimos los resultados correspondientes al caso de tres variables.

Definición 31 *Sea $f(x,y,z)$ una función real de tres variables con dominio D abierto, $(a,b,c)\in D$ y $\mathbf{u}=(m,n,p)$ un vector unitario del plano. Se llama **derivada direccional de** f según $\mathbf{u}$ en (a,b,c) al límite siguiente cuando exista*

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b,c)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+mt,b+nt,c+pt)-f(a,b,c)}{t}.$$

*El **vector gradiente** de f en (a,b,c) es el vector del espacio tridimensional de componentes $f_x(a,b,c)$, $f_y(a,b,c)$ y $f_z(a,b,c)$ y se denota por $\nabla f(a,b,c)$, es decir*

$$\boldsymbol{\nabla} f(a,b,c)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\,\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\,\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\,\mathbf{k}.$$

Teorema 32 *Si f es diferenciable en $(a,b,c)\in D$ se verifican las siguientes propiedades:*

1.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(a,b,c) &= \nabla f(a,b,c)\cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\, m + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\, n + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\, p. \end{aligned}$$

2. La dirección del gradiente $\nabla f(a,b,c)$ es la dirección en la cual la derivada direccional de f en (a,b,c) es máxima. El valor máximo de la derivada direccional de f en (a,b,c) es $||\nabla f(a,b,c)||$.

3. La dirección $-\nabla f(a,b,c)$ es la dirección en la cual la derivada direccional de f en (a,b,c) es mínima. El valor mínimo de la derivada direccional de f en (a,b,c) es $-||\nabla f(a,b,c)||$.

4. El vector gradiente $\nabla f(a,b,c)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (a,b,c).

La ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\,(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\,(z-c) = 0$$

representa un plano cuyo vector normal es el vector gradiente de f. Por ser el gradiente ortogonal a las superficies se define dicho plano como el *plano tangente* a la superficie $f(x,y,z)=0$ en el punto (a,b,c). En particular para una superficie descrita por la ecuación $z=f(x,y)$ definiendo

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

la superficie satisface $F(x,y,z)=0$. Su plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) + (-1)(z-f(a,b)) = 0.$$

Despejando z en dicha ecuación resulta

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b).$$

Es decir, el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en un punto (a,b) es la linealización o aproximación lineal de f en dicho punto.

7 Máximos y Mínimos

En el caso de una función de una variable, $y = f(x)$, podemos determinar los puntos donde se alcanza un máximo o un mínimo examinando el comportamiento de las derivadas f' y f''. Tratamos de extender dicho procedimiento al caso de dos variables.

7.1 Puntos Críticos y Extremos

En primer lugar observamos que si una función de dos variables $f(x,y)$ alcanza un extremo relativo en un punto (a,b) la función de una variable $f(x,b)$ que representa la curva obtenida al cortar la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = b$ alcanza un extremo relativo en $x = a$. Por tanto, la pendiente de la tangente a dicha curva, i.e. $f_x(a,b)$, ha de ser cero en dicho punto. Análogamente, la curva $f(a,y)$ es una curva del plano $x = a$ con extremo relativo en el punto $y = b$. En consecuencia, la pendiente de la tangente en dicho punto, i.e. $f_y(a,b)$, ha de ser cero.

Teorema 33 (Condiciones necesarias de extremo relativo) *Sea $f(x,y)$ una función real definida en un conjunto abierto $D \subset \mathcal{R}^2$ y $(a,b) \in D$. Si f admite derivadas parciales en (a,b) y alcanza un máximo o mínimo relativo en dicho punto se verifica*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \ y \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Como en el caso de una variable y a pesar de su utilidad el teorema anterior tiene sus limitaciones:

1. Las condiciones $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$ son necesarias pero no suficientes. Es decir, existen puntos (a,b) que satisfacen dichas condiciones pero que no corresponden a un extremo relativo. Por ejemplo, la función

   $$f(x,y) = y^2 - x^2$$

   posee derivadas parciales iguales a cero en el punto $(0,0)$ y en dicho punto no se alcanza ni máximo ni mínimo relativo ya que $f(t,0) < 0$ y $f(0,t) > 0$ para todo t.

2. Las condiciones no tienen sentido para aquellos puntos en los que f no posea derivadas parciales. Por ejemplo, la función

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

posee un mínimo en $(0,0)$ y no existen derivadas parciales en dicho punto.

3. Las condiciones no se verifican en los puntos frontera del conjunto D. Por ejemplo, si $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

alcanza el máximo absoluto en cualquier punto de la frontera de D pero las derivadas parciales no se anulan simultáneamente en ninguno de estos puntos.

Definición 34 *Sea $f(x,y)$ una función real definida en un conjunto abierto $D \subset \mathcal{R}^2$. Se llaman **puntos críticos** de f a los puntos (x,y) que sean solución de las ecuaciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

o a los puntos en los que no exista alguna de las derivadas parciales f_x, f_y.

Para conocer si los puntos críticos de una función diferenciable corresponden a un máximo, a un mínimo o a ninguna de las dos cosas, se puede utilizar el siguiente test que corresponde al criterio de la derivada segunda para analizar los extremos de funciones de una variable.

Teorema 35 (Criterio de las derivadas parciales segundas) *Sea $f(x,y)$ una función real con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto abierto $D \subset \mathcal{R}^2$. Sea $(a,b) \in D$ un punto crítico de f, i.e. $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ y*

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2.$$

Entonces,

1. Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, existe mínimo relativo en (a,b).

2. Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, existe máximo relativo en (a,b).

3. Si $\Delta < 0$, no existe ni máximo ni mínimo en (a,b).

4. Si $\Delta = 0$ el criterio no da información.

En relación con el criterio anterior el determinante Δ se conoce con el nombre de *hessiano* de f y los puntos críticos en los que $\Delta < 0$ se llaman *puntos silla*.

7.2 Estudio de Máximos y Mínimos

Basándonos en la propiedad de existencia de extremos de las funciones continuas y en las condiciones necesarias para la existencia de extremos de una función con derivadas parciales indicamos el procedimiento a seguir para obtener los máximos y mínimos de una función continua $f(x,y)$ en una región R:

1. Se determinan los puntos críticos de f interiores a R. Es decir, los puntos interiores a R donde $f_x = f_y = 0$ y los puntos donde f_x y/o f_y dejen de existir.

2. Se seleccionan los posibles puntos de extremo de f en la frontera de R. La manera de hacer dicha selección depende de la forma del conjunto frontera. Si la frontera se puede expresar mediante relaciones del tipo $y = g_i(x)$, dicha selección se reduce a buscar los posibles extremos de las funcines de una variable $F_i(x) = f(x, g_i(x))$. Si la frontera está determinada por una ecuación de la forma $g(x,y) = 0$, sin que sea posible despejar y en función de x, se habrá de utilizar el método de Lagrange.

3. Si R es una región cerrada y acotada se buscan los valores máximo y el mínimo que la función f toma en cada uno de los puntos obtenidos en los dos pasos anteriores. Dichos valores son máximo y mínimo absolutos.

4. Si R es no cerrado o no acotado y f admite derivadas de primero y segundo orden continuas se aplica el criterio de la segunda derivada

a cada uno de los puntos críticos para establecer si se trata de un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto silla. Recalcar que dicho criterio solo permite asegurar, y no siempre, el carácter relativo de los extremos. Para establecer si se trata de extremos absolutos, será necesario un análisis particular del problema.

8 Multiplicadores de Lagrange

Existen situaciones en las que interesa conocer los máximos y mínimos de una función cuando las variables están relacionadas mediante una o más ecuaciones conocidas como *ligaduras*. Por ejemplo, dada una función $f(x, y)$ definida en una región R del plano se plantea determinar los máximos y mínimos de f cuando (x, y) es un punto de la curva Γ definida por la ecuación $g(x, y) = 0$.

Una manera posible de resolver este problema consiste en reducirlo a uno de máximos y mínimos de una variable. Para ello se despeja la variable y como una función de x, i.e. $y = h(x)$, y a continuación se reemplaza y por $h(x)$ en la expresión de f, para obtener la función de una variable $F(x) = f(x, h(x))$.

Aunque dicho procedimiento es de concepción simple, en la práctica puede resultar difícil o imposible despejar alguna de las variables en función de la otra. Un procedimiento alternativo lo constituye el *método de los multiplicadores de Lagrange*.

En primer lugar introduciremos el método para problemas con una sola condición y luego lo generalizaremos al caso de dos o más condiciones.

8.1 Problemas con una Condición de Ligadura

En este caso nos planteamos determinar los máximos y mínimos de una función de dos o más variables sujetas a una condición. Por sencillez en la notación expondremos solo el caso de dos variables. Es decir, se trata de encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x, y)$ sujetos a la condición $g(x, y) = 0$. Supongamos que f y g admiten derivadas parciales continuas.

8.1.1 Método de Lagrange

El método de los multiplicadores Lagrange consta de los siguientes pasos:

1. Crear una función auxiliar

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

   donde λ es una nueva variable llamada *multiplicador de Lagrange*.

2. Obtener los puntos críticos de la función auxiliar F, i.e. las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

3. Formar una lista con los puntos (x, y) tales que (x, y, λ) sea un punto obtenido en el paso anterior y $\nabla g(x, y) \neq 0$.

4. Continuar el análisis del problema de máximos y mínimos en la forma usual a partir de la lista de puntos obtenida en el paso anterior.

En el caso de una función de tres variables $f(x, y, z) = 0$ y una condición $g(x, y, z) = 0$ la función auxiliar F se construye de la misma manera, i.e. $F = f + \lambda g$ y el procedimiento de Lagrange sigue los mismos pasos. La diferencia será que ahora tendremos que considerar cuatro condiciones en las derivadas,

$$F_x = 0 \ ; \ F_y = 0 \ ; \ F_z = 0 \text{ y } F_\lambda = g = 0.$$

8.1.2 Fundamento del Método de Lagrange

El procedimiento de Lagrange se basa en el siguiente resultado.

Teorema 36 *Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones con derivadas parciales continuas. Sea (a, b) un punto tal que $g(a, b) = 0$ y $\nabla g(a, b) \neq 0$. Si f alcanza un extremo relativo en (a, b) sujeto a la condición $g(x, y) = 0$, existe un λ tal que*

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

Sin entrar en una demostración formal de dicho teorema expondremos las ideas en las que se basa. Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización de la curva $g(x, y) = 0$. Por la regla de la cadena, a lo largo de esta curva se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$$

donde $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ es un vector tangente a la curva. Puesto que f alcanza un extremo en el punto (a, b), la derivada de f con respecto a t será cero en dicho punto. Esto significa que, ∇f y $\mathbf{r}'$ son ortogonales en el punto (a, b). Como quiera que el ∇g es normal a la curva de nivel $g(x, y) = 0$, y por consiguiente al vector tangente $\mathbf{r}$, se sigue que ∇f y ∇g serán paralelos, es decir

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

8.2 Problemas con Dos o Más Cond. de Ligadura

En este caso nos planteamos determinar los máximos y mínimos de una función de tres o más variables sujetas a dos o más condiciones. Por sencillez en la notación expondremos solo el caso de tres variables y dos condiciones. Es decir, se trata de encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x, y, z)$ sujetos a las condiciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Supongamos que f, g_1 y g_2 admiten derivadas parciales continuas.

8.2.1 Método de Lagrange

El método de los multiplicadores Lagrange consta de los siguientes pasos:

1. Crear una función auxiliar

$$F(x, y, z, \lambda, \mu, z) = f(x, y) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z)$$

   donde λ y μ son dos nuevas variables llamadas *multiplicadores de Lagrange.*

2. Obtener los puntos críticos de la función auxiliar F, i.e. las soluciones

de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial z} + \mu\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g_1(x, y, z) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \mu} &= g_2(x, y, z) = 0
\end{aligned}$$

3. Formar una lista con los puntos (x, y, z) tales que (x, y, z, λ, μ) sea un punto obtenido en el paso anterior y los vectores $\nabla g_1(x, y, z)$ y $\boldsymbol{\nabla} g_2(x, y, z)$ linealmente independientes.

4. Continuar el análisis del problema de máximos y mínimos en la forma usual a partir de la lista de puntos obtenida en el paso anterior.

El método anterior se extiende de forma análoga al caso de n variables y m condiciones de ligadura. En ese caso se introducen m multiplicadores de Lagrange lo que darán lugar en el paso dos a un sistema de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ incógnitas.

8.2.2 Fundamento del Método de Lagrange

El procedimiento de Lagrange se basa en el siguiente resultado.

Teorema 37 *Sean $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ y $g_2(x, y, z)$ funciones con derivadas parciales continuas. Sea (a, b, c) un punto tal que*

$$g_1(a, b, c) = 0 \ y \ g_2(a, b, c) = 0.$$

Supongamos que $\boldsymbol{\nabla} g_1(a, b, c)$ y $\boldsymbol{\nabla} g_2(a, b, c)$ son linealmente independientes. Si f alcanza un extremo relativo en (a, b, c) sujeto a las condiciones

$$g_1(x, y, z) = 0 \ y \ g_2(x, y, z) = 0,$$

existen valores λ y μ tales que

$$\boldsymbol{\nabla} f(a, b, c) = \lambda \boldsymbol{\nabla} g_1(a, b, c) + \mu \boldsymbol{\nabla} g_2(a, b, c).$$

Sin entrar en una demostración formal de dicho teorema expondremos las ideas en las que se basa. Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización de la curva intersección de las superficies $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Por la regla de la cadena, a lo largo de esta curva se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$$

donde $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$ es un vector tangente a la curva.

Puesto que f alcanza un extremo en el punto (a, b, c), la derivada de f con respecto a t será cero en dicho punto. Esto significa que, ∇f y $\mathbf{r}'$ son ortogonales en el punto (a, b, c). Como quiera que los vectores ∇g_1 y ∇g_2 son normales a las superficies $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, respectivamente, dichos vectores serán ortogonales al vector tangente $\mathbf{r}'$. En consecuencia, el vector ∇fse encuentra en el plano determinado por los vectores ∇g_1 y ∇g_2 lo que significa que

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2.$$