CALCULO 11-M
Examen Parcial Mayo 98

6/06/98

Ejercicio 1 *1. Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

2. A partir de la serie geométrica $\sum x^n$ *obtener un desarrollo en serie de potencias de la función*

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Solución:

1. Intentamos el criterio del cociente

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 3\frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\ &= \frac{3}{e} \end{aligned}$$

Puesto que $L > 1$ la serie diverge.

2. Partimos de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

y substituimos x por $-x^2$, con lo que resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Derivando ambos lados se obtiene

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}$$

y multiplicando por -1

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n x^{2n-1}.$$

Ejercicio 2 *Determinar*

1. *La longitud del arco de la curva*

$$\mathbf{r}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

comprendido entre $t = 0$ *y* $t = 3\pi/4$.

2. *El área encerrada por el bucle interior de la curva*

$$r = 2\cos\theta + 1.$$

Solución:

1. Vector tangente

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (\sin t + t\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t - t \sin t - \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \\ &= t\cos t\mathbf{i} - t \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Norma

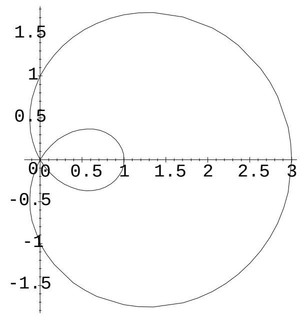
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (-t\sin t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5}t.$$

Longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = 3\pi/4$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{3\pi/4} \|\mathbf{r}'(t)\| \; dt \\ &= \int_0^{3\pi/4} \sqrt{5}t \, dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{5}}{2}t^2\right]_0^{3\pi/4} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{32}\pi^2. \end{aligned}$$

2. El bucle interior corresponde a

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_2 = \frac{4\pi}{3}.$$



$r = 2\cos\theta + 1$

El área de la región encerrada por dicho bucle es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (2\cos\theta + 1)^2 d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(4\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 3)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin 2\theta + 4\sin\theta + 3\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\pi\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi\right)\right] \\
&= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3 *Sea* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. *Indicar el dominio* D *de* f. *¿Es* f *continua en* D*?*
2. *Probar que* f *no es diferenciable en* $(0,0)$ *pero sí lo es en cualquier punto* $(x,y) \neq (0,0)$.
3. *Determinar la curva de nivel que pasa por el punto* $(3,4)$ *y el vector* $\boldsymbol{\nabla} f$ *en dicho punto.*
4. *Determinar la derivada direccional en el punto* $(3,4)$ *según la dirección de máximo crecimiento de la función*
$$g(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{4} - 1$$
5. *Ecuación del plano tangente a la superficie* $z = f(x,y)$ *en el punto* $(3,4)$.

Solución:

1. El dominio es todo el plano. La función es continua en todos los puntos por ser un polinomio cuadrático en las variables x, y compuesto con la función raíz cuadrada.

2. Para estudiar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ comenzaremos por obtener las derivadas parciales en dicho punto. De la definición de derivada parcial se sigue

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-\sqrt{0^2+0^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.
\end{aligned}$$

Como el último límite no existe la función f no posee derivada parcial según x en el punto $(0,0)$ por lo que no es diferenciable. En los demás puntos la función posee derivadas parciales

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

y éstas son continuas por lo que f es diferenciable en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$.

3. En el punto $(3,4)$

$$f(x,y)=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

La curva de nivel que pasa por dicho punto es la curva de ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=5$$

o lo que es lo mismo la circunferencia de radio 5

$$x^2+y^2=25.$$

El gradiente de f es el vector

$$\begin{aligned}
\nabla f &= f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}
\end{aligned}$$

que en el punto $(3,4)$ se reduce a

$$\nabla f(3,4)=\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

4. El gradiente de g es
$$\nabla g = \frac{2\sqrt{3}x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{2}\mathbf{j}$$
La dirección de máximo crecimiento de g en el punto $(3,4)$ viene dada por el gradiente en dicho punto, es decir por
$$\mathbf{u} = \nabla g(3,4) = 2\sqrt{3}\mathbf{i}+2\mathbf{j}.$$
La norma del vector $\mathbf{u}$ es
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$$
Un vector unitario en dicha dirección es
$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}.$$
La derivada direccional de f en el punto $(3,4)$ según la dirección $\mathbf{u}$ es
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(3,4) &= \nabla f(3,4)\cdot \mathbf{u}_0 \\ &= \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}+4}{10}. \end{aligned}$$

5. Plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(3,4)$
$$z - f(3,4) = f_x(3,4)(x-3) + f_y(3,4)(y-4)$$
o sea
$$z - 5 = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$$
o bien
$$3x + 4y - 5z = 0.$$

Ejercicio 4 *Se pide*

1. *Estudiar los máximos y mínimos de la función*
$$f(x,y) = (x-3)^2 + y^2$$
en el recinto
$$D = \{(x,y)/0 \le x \le 4, x^2 \le y \le 4x\}.$$

2. *Utilizando el método de Lagrange maximizar la función*

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeta a la condición

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

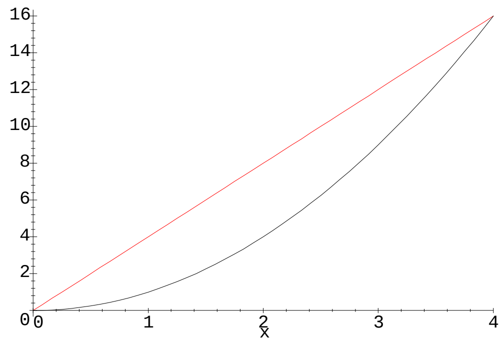
con $x, y, z \geq 0$.

Solución:

1. Los puntos críticos son las soluciones de

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x-3) = 0 \\ f_y &= 2y = 0. \end{aligned}$$

la única solución es el punto $(3, 0)$ que no pertenece al interior del recinto por lo que lo descartamos como posible extremo.



$$D = \{(x, y)/0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 4x\}$$

La frontera se compone de los arcos $y = x^2$ e $y = 4x$ con $0 \leq x \leq 4$. Sobre el primer arco la función f toma los valores

$$F_1(x) = f(x, x^2) = (x-3)^2 + x^4.$$

Derivando e igualando a cero resulta

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= 2(x-3) + 4x^3 \\ &= 2(2x^3 + x - 3) \\ &= 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dicha ecuación proporciona como única solución real el valor $x = 1$ al que corresponde $y = 1$. Sobre el otro arco se tiene

$$F_2(x) = f(x, 4x) = (x-3)^2 + 16x^2.$$

Derivando e igualando a cero resulta

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= 2(x-3) + 32x \\ &= 34x - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dicha ecuación proporciona el punto $x = 3/17$, al que corresponde $y = 12/17$. Añadiendo los puntos $(0,0)$ y $(4,16)$ como puntos de unión de ambos arcos resultan los siguientes posibles puntos de extremo

$$(0,0), \quad (3/17, 12/17), \quad (1,1), \quad \text{y} \quad (4,16).$$

Puesto que f es continua y el recinto cerrado y acotado sabemos que la función alcanza máximo y mínimo los cuales necesariamente se encontrarán entre dichos puntos. Comparando resulta,

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 9 \\ f(3/17, 12/17) &= 144/17 \\ f(1,1) &= 5 \\ f(4,16) &= 257 \end{aligned}$$

por lo que el máximo se alcanza en el punto $(4,16)$ y el mínimo en el punto $(1,1)$.

2. Función auxiliar de Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^3 + y^3 + z^3 - 1).$$

Derivando e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} L_x &= yz + 3\lambda x^2 = 0 \\ L_y &= xz + 3\lambda y^2 = 0 \\ L_z &= xy + 3\lambda z^2 = 0 \\ L_\lambda &= x^3 + y^3 + z^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando las tres primeras por x, y, z respectivamente se obtiene

$$\begin{aligned} xyz + 3\lambda x^3 &= 0 \\ xyz + 3\lambda y^3 &= 0 \\ xyz + 3\lambda z^3 &= 0. \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$3\lambda x^3 = 3\lambda y^3 = 3\lambda z^3 = -xyz$$

Para $\lambda \neq 0$ resulta $x = y = z$ y por tanto substituyendo en la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 1 = 0$$

se tiene

$$3x^3 = 1$$

y por consiguiente

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

En dicho punto

$$f(x, y, z) = xyz = x^3 = \frac{1}{3}.$$

Si fuera $\lambda = 0$ resultaría $xyz = 0$ y por tanto $x = 0$, $y = 0$, o $z = 0$. En cualquier de estos casos la función alcanza el valor 0. Como la función es continua y el recinto cerrado y acotado debe alcanzarse máximo y mínimo. El máximo se obtiene en el punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right).$$