CALCULO 11-M

Examen Parcial Junio 02
Duración 2h 30m

Ejercicio 1 *(2 puntos)*

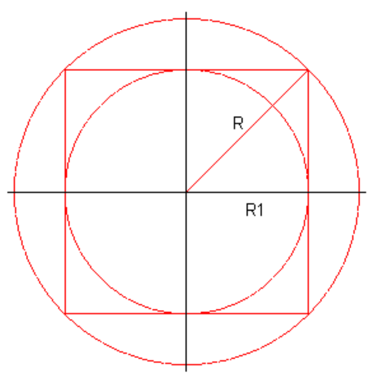
1. *Dentro de un círculo de radio R se inscribe un cuadrado y dentro de éste un nuevo círculo. El proceso se repite indefinidamente. Determine la suma de las áreas de todos los círculos resultantes.*

2. *A partir de la serie geométrica $\sum x^n$ obtener un desarrollo en serie de potencias de la función*

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Solución:

1. Si R_1 representa el radio del círculo interior de la figura



se deduce que

$$R^2 = R_1^2 + R_1^2 = 2R_1^2$$

por lo que

$$R_1^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Por tanto, si A_0 representa el área del círculo exterior, el área A_1 del primer círculo será

$$A_1 = \pi R_1^2 = \pi \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} A_0.$$

Repitiendo el proceso sucesivamente se obtiene

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2} A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_0 \\
A_3 &= \frac{1}{2} A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 A_0 \\
&\cdots\cdots \\
A_n &= \frac{1}{2} A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Por tratarse de una sucesión geométrica de razón $1/2 < 1$ se tiene

$$A_T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 = A_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2.$$

2. Partiendo de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

substituimos x por $-x^2$, con lo que resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.
\end{aligned}$$

Puesto que la serie geométrica converge para $|x| < 1$, la serie anterior converge para $x^2 < 1$ y por tanto en el mismo intervalo $|x| < 1$. Derivando ambos lados se obtiene

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}.$$

Por último, multiplicando por -1, resulta

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n x^{2n-1}.$$

Dicha serie converge para $|x| < 1$.

Ejercicio 2 *(2 puntos) Dada la curva*

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\,\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j}$$

determinar:

1. *La tangente(s) en el origen.*
2. *Puntos donde la curva presenta tangente horizontal o vertical*
3. *Haga un esquema de la curva*

Solución:

1. La curva pasa por el origen para los valores de t tales que $x = y = 0$.Puesto que

   $$x = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

   e

   $$y = t^3 - t = t(t-1)(t+1)$$

   observamos que la curva pasa por el origen para $t = \pm 1$.Derivando, se tiene

   $$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j}$$

   por lo que los vectores tangente serán

   $$\mathbf{r}'(1) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

   y

   $$\mathbf{r}'(-1) = -2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}.$$

   En el primer caso la recta tangente es la recta

   $$y = x$$

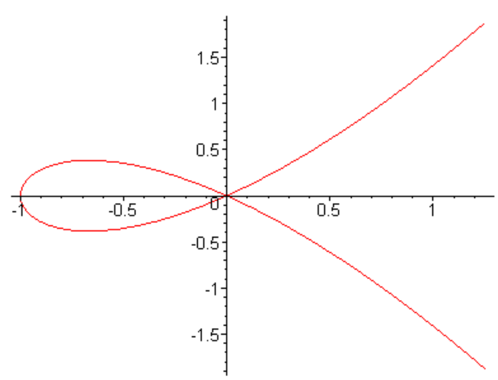
   y en el segundo

   $$y = -x.$$

2. Los puntos de tangente vertical se obtienen resolviendo la ecuación
$$x'(t) = 2t = 0$$
de donde resulta $t = 0$.Para dicho valor se tiene
$$y'(0) = -1 \neq 0.$$
Por consiguiente existe tangente vertical en
$$x = -1, y = 0.$$

Los puntos de tangente horizontal se obtienen resolviendo la ecuación
$$y'(t) = 3t^2 - 1 = 0$$
de donde resulta $t = \pm\sqrt{3}/3$. En ambos casos,
$$x'(\pm\sqrt{3}/3) = \pm 2\sqrt{3}/3 \neq 0.$$
Por consiguiente existe tangente horizontal en los puntos
$$x = -2/3, y = \pm 2\sqrt{3}/9.$$

3. Para completar la curva observamos que cuando $t \to -\infty$, $x = +\infty$ e $y = -\infty$, mientras que para $t \to +\infty$, $x = +\infty$ e $y = +\infty$. Además la curva es simétrica respecto del eje OX ya que $x(t) = x(-t)$ e $y(t) = -y(-t)$.



Ejercicio 3 *(2 puntos) Determinar el área entre el lazo interno y el lazo externo de la caracola*

$$r = 1 - 2\sin\theta.$$

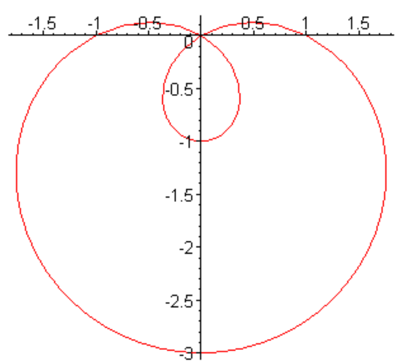
Solución: Puesto que

$$r(\pi - \theta) = 1 - 2\sin(\pi - \theta) = 1 - 2\sin\theta = r(\theta)$$

la curva será simétrica respecto del eje OY. Tabla de valores

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	3	$1+\sqrt{3}$	2	1	0	$1-\sqrt{3}$	-1

Gráfica de la curva



El área de la región entre los dos bucles es

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} r^2(\theta)\, d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} r^2(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Puesto que

$$
\begin{aligned}
\int r^2(\theta)\,d\theta &= \int (1-2\sin\theta)^2\,d\theta \\
&= \int (1-4\sin\theta+4\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \int (1-4\sin\theta+4\frac{1-\cos 2\theta}{2})\,d\theta \\
&= \int (3-4\sin\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 3\theta+4\cos\theta-\sin 2\theta+C
\end{aligned}
$$

resulta

$$
\begin{aligned}
A &= 3\theta+4\cos\theta-\sin 2\theta|_{-\pi/2}^{\pi/6} - (3\theta+4\cos\theta-\sin 2\theta)|_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \pi+3\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4 *(2 puntos) Estudiar los máximos y mínimos de la función*

$$f(x,y)=(x-3)^2+(y-10)^2$$

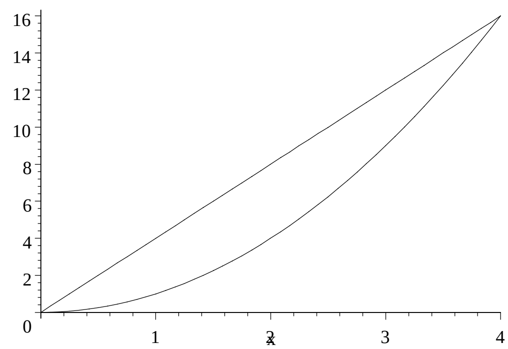
en el recinto

$$D=\{(x,y)/0\leq x\leq 4, x^2\leq y\leq 4x\}.$$

Solución:Los puntos críticos son las soluciones de

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2(x-3)=0 \\
f_y &= 2(y-10)=0.
\end{aligned}
$$

la única solución es el punto $(3,10)$.



$$D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 4x\}$$

La frontera se compone de los arcos $y = x^2$ e $y = 4x$ con $0 \leq x \leq 4$. Sobre el primer arco la función f toma los valores

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f(x,x^2) \\ &= (x-3)^2 + (x^2-10)^2 \\ &= x^4 - 19x^2 - 6x + 109. \end{aligned}$$

Derivando resulta

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= 4x^3 - 38x - 6 \\ &= 2(2x^3 - 19x - 3) \\ &= 2\,(x+3)\left(2x^2 - 6x - 1\right). \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación

$$2x^3 - 19x - 3 = 0$$

son

$$x = -3 \text{ y } x = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

Solamente la solución

$$x = \frac{3 + \sqrt{11}}{2}$$

pertenece al intervalo $0 < x < 4$.A dicho valor corresponde

$$y = \frac{10 + 3\sqrt{11}}{2}.$$

Sobre el arco $y = 4x$ se tiene

$$\begin{aligned} F_2(x) &= f(x, 4x) \\ &= (x-3)^2 + (4x-10)^2 \\ &= 17x^2 - 86x + 109. \end{aligned}$$

Derivando e igualando a cero resulta

$$F_2'(x) = 34x - 86 = 0$$

lo que proporciona el punto

$$x = \frac{43}{17},\ y = \frac{172}{17}.$$

Añadiendo los puntos $(0,0)$ y $(4,16)$ como puntos de unión de ambos arcos resultan los siguientes posibles puntos de extremo con sus valores correspondientes

x	y	$f(x,y)$
0	0	109
3	10	0
4	16	37
$\frac{3+\sqrt{11}}{2}$	$\frac{10+3\sqrt{11}}{2}$	$\frac{219-66\sqrt{11}}{4}$
$\frac{43}{17}$	$\frac{172}{17}$	$\frac{60}{289}$

Puesto que f es continua y el recinto cerrado y acotado sabemos que la función alcanza máximo y mínimo los cuales necesariamente se encontrarán entre dichos puntos. De la tabla resulta mínimo en $(3,10)$ y máximo en $(0,0)$

Ejercicio 5 *(2 puntos) Sean*

$$f(x,y) = xy$$

y

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1.$$

1. *Utilizando el método de Lagrange determinar los máximos y mínimos de la función $z = f(x,y)$ sobre la curva $g(x,y) = 0$.*

2. *Determine:*

(a) *Las curvas de nivel de la función $f(x,y)$*

(b) *El vector gradiente de f y el vector gradiente de g.*

(c) *¿Cómo son los vectores anteriores en los puntos de la curva $g(x,y) = 0$ donde f alcanza los extremos? ¿ y en otro punto cualquiera? Dibuje un gráfico incluyendo la curva $g(x,y) = 0$, las curvas de nivel de f y los vectores gradiente.*

Solución:

1. Función auxiliar de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

Derivando e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} L_x &= y + 2\lambda x = 0 \\ L_y &= x + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce

$$y = -2\lambda x$$

que substituida en la segunda proporciona

$$x(1 - \lambda^2) = 0.$$

De aquí se sigue $x = 0$ o $\lambda = \pm 1$. Para $x = 0$ se tiene $y = 0$, pero el punto $(0,0)$ no satisface la ecuación de la elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0.$$

Para $\lambda = \pm 1$, la condición $L_x = 0$ proporciona las rectas

$$y = \pm 2x.$$

Sus intersecciones con la elipse son los puntos

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}\right)$$

Como la función es continua y el recinto cerrado y acotado debe alcanzarse máximo y mínimo. El máximo se obtiene en los puntos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

siendo

$$f_{\max} = 1.$$

mientras que el mínimo se alcanza en los puntos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

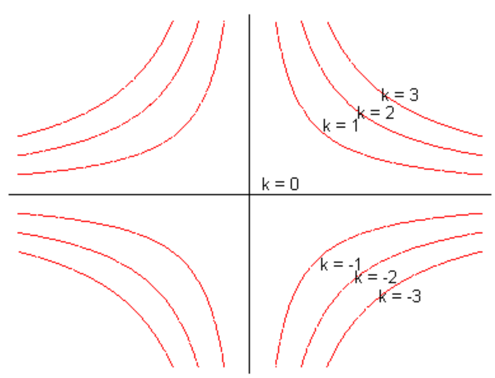
siendo

$$f_{\min} = -1.$$

(a) Las curvas de nivel de $f(x, y) = xy$ son las curvas

$$xy = k.$$

dichas curvas son hipérbolas equiláteras. Para $k > 0$ las hipérbolas tienen una rama en el cuadrante $x > 0, y > 0$ y la otra en el cuadrante $x < 0, y < 0$.Para $k < 0$ las hipérbolas tienen una rama en el cuadrante $x < 0, y > 0$ y la otra en el cuadrante $x > 0, y < 0$.Por último las curvas de nivel $k = 0$ son los ejes coordenados.



(b) Gradiente de f

$$\nabla f = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

Gradiente de g

$$\nabla g = 2x\,\mathbf{i} + \frac{y}{2}\,\mathbf{j}$$

(c) En el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\\ \nabla g &= \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

es decir

$$\nabla f = -\lambda \nabla g \quad \text{con } \lambda = -1.$$

En el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\\ \nabla g &= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

es decir

$$\nabla f = -\lambda \nabla g \quad \text{con } \lambda = 1.$$

En el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\\ \nabla g &= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

es decir

$$\nabla f = -\lambda \nabla g \quad \text{con } \lambda = -1.$$

En el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\sqrt{2}\right)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\\ \nabla g &= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

es decir
$$\nabla f = -\lambda \nabla g \quad \text{ con } \lambda = -1.$$

En todos los casos ambos gradientes son proporcionales, lo que corresponde a vectores paralelos con el mismo sentido o con sentido opuesto, siendo la constante de proporcionalidad el multiplicador de Lagrange correspondiente. En un punto que no sea extremo los vectores gradientes tendrán direcciones distintas. Por ejemplo en el punto $(1, 0)$ son perpendiculares.