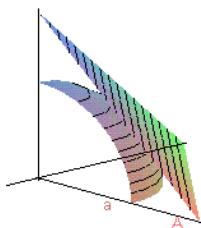


Ejercicio 1 Encontrar el volumen mínimo de la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y un plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en un punto del primer octante.



Solución:

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera perteneciente al elipsoide y situado en el primer octante, i.e. en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. El plano tangente al elipsoide en dicho punto tiene como vector normal el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

en $P = (x_0, y_0, z_0)$, es decir,

$$\mathbf{n} = \nabla f|_P = \frac{2x_0}{a^2}\mathbf{i} + \frac{2y_0}{b^2}\mathbf{j} + \frac{2z_0}{c^2}\mathbf{k}.$$

Por tanto la ecuación del plano tangente al elipsoide en P es

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Dividiendo por dos y reagrupando los términos independientes resulta

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0$$

Teniendo en cuenta que el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertenece al elipsoide sus coordenadas verifican la relación

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

con lo que la ecuación del plano tangente se reduce a

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0.$$

El punto de corte de dicho plano con el eje OX ha de verificar la ecuación anterior y las ecuaciones $y = 0$, $z = 0$. Por lo que sus coordenadas son la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a^2}x - 1 &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta

$$A = \left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0 \right).$$

De forma análoga los puntos de corte con los ejes OY y OZ resultan ser

$$\begin{aligned} B &= \left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0 \right), \\ C &= \left(0, 0, \frac{c^2}{z_0} \right). \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro formado por los puntos anteriores y el origen de coordenadas viene dado por la fórmula

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{a^2}{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{z_0} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}. \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro es inversamente proporcional al producto de las coordenadas del punto P sobre el que se traza el plano tangente. Como se trata de un punto arbitrario del elipsoide substituiremos el producto $x_0 y_0 z_0$ por xyz .

Además, el problema de minimizar V es equivalente a maximizar el denominador xyz con lo que se plantea el problema de encontrar el punto de máximo de la función

$$F(x, y, z) = xyz$$

sujeto a la condición

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y perteneciente a la región $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Para ello construimos la función auxiliar de Lagrange

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

Los puntos críticos de dicha función son las soluciones de

$$\begin{aligned} L_x &= yz + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0 \\ L_y &= xz + 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0 \\ L_z &= xy + 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0 \\ L_\lambda &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x , la segunda por y y la tercera por z resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} xyz + 2\lambda \frac{x^2}{a^2} &= 0 \\ xyz + 2\lambda \frac{y^2}{b^2} &= 0 \\ xyz + 2\lambda \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$2\lambda \frac{x^2}{a^2} = 2\lambda \frac{y^2}{b^2} = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}.$$

Para $\lambda \neq 0$ resulta

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Substituyendo en la ecuación del elipsoide (condición $L_\lambda = 0$) se obtiene

$$3 \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

y por tanto

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}b, \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

lo que da lugar a un total de ocho puntos.

Para $\lambda = 0$ las tres primeras ecuaciones del sistema $L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0, L_\lambda = 0$ se reducen a

$$yz = xz = xy = 0$$

que implican $x = y = 0, x = z = 0, o y = z = 0$. Substituyendo en la ecuación del elipsoide se obtienen los 6 puntos siguientes

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad y = 0, \quad z = \pm c \\ x &= 0, \quad y = \pm b, \quad z = 0 \\ x &= \pm a, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

En todos ellos la función F toma el valor 0. En los ocho primeros puntos la función F toma el valor

$$F = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 abc.$$

Como la función F es continua y el elipsoide cerrado y acotado se ha de alcanzar máximo y mínimo. El máximo se alcanza en aquellos puntos en que

$$F = F_{\max} = + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 abc$$

y el mínimo en aquellos que

$$F = F_{\min} = - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 abc.$$

En particular en el único punto perteneciente al primer octante

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

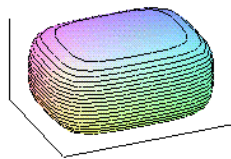
se alcanza un máximo de F al que corresponde un volumen mínimo

$$V_{\min} = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{F_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{2} abc.$$

Ejercicio 2 Encontrar la máxima distancia del origen a la superficie S

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$$

con $a > b > c > 0$.



Solución

Se trata de encontrar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

con la condición de que $(x, y, z) \in S$. Tanto d como d^2 alcanzan los máximos y mínimos en los mismos puntos. Esto permite trabajar sin la raíz cuadrada lo que simplifica los cálculos.

La función auxiliar de Lagrange es

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} - 1 \right).$$

Los puntos críticos de L son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 4\lambda \frac{x^3}{a^4} = 0 \\ L_y &= 2y + 4\lambda \frac{y^3}{b^4} = 0 \\ L_z &= 2z + 4\lambda \frac{z^3}{c^4} = 0 \\ L_\lambda &= \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones equivalen a

$$\begin{aligned} x(a^4 + 2\lambda x^2) &= 0 \\ y(b^4 + 2\lambda y^2) &= 0 \\ z(c^4 + 2\lambda z^2) &= 0 \end{aligned}$$

Cada ecuación es producto de dos factores distintos. Para que el producto sea cero, uno u otro factor debe ser cero lo que da lugar a ocho posibles combinaciones. La primera posibilidad resulta de suponer $x, y, z \neq 0$ lo que implica

$$a^4 + 2\lambda x^2 = 0, \quad b^4 + 2\lambda y^2 = 0, \quad c^4 + 2\lambda z^2 = 0$$

y por tanto

$$x^2 = -\frac{a^4}{2\lambda}, \quad y^2 = -\frac{b^4}{2\lambda}, \quad z^2 = -\frac{c^4}{2\lambda}.$$

Substituyendo en la ecuación de la superficie resulta

$$\frac{a^4}{4\lambda^2} + \frac{b^4}{4\lambda^2} + \frac{c^4}{4\lambda^2} = 1$$

de donde se sigue

$$2\lambda = \pm\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}.$$

Desechando la raíz positiva ya que esta produciría soluciones imaginarias de x, y, z se obtienen los ocho puntos siguientes

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}, \quad y = \pm\frac{b^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}, \quad z = \pm\frac{c^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}.$$

Ahora suponiendo $z = 0$ se ha de verificar

$$a^4 + 2\lambda x^2 = 0, \quad b^4 + 2\lambda y^2 = 0, \quad z = 0$$

y por tanto

$$x^2 = -\frac{a^4}{2\lambda}, \quad y^2 = -\frac{b^4}{2\lambda}, \quad z = 0.$$

Substituyendo en la ecuación de la superficie resulta

$$\frac{a^4}{4\lambda^2} + \frac{b^4}{4\lambda^2} = 1$$

de donde se sigue

$$2\lambda = \pm\sqrt{a^4 + b^4}.$$

Desechando la raíz positiva ya que esta produciría soluciones imaginarias de x, y, z se obtienen los cuatro puntos siguientes

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}, \quad y = \pm\frac{b^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}, \quad z = 0$$

Análogamente para $y = 0$ resultan los cuatro puntos

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + c^4}}, \quad y = 0, \quad z = \pm \frac{c^2}{\sqrt[4]{a^4 + c^4}}$$

y para $x = 0$ los cuatro puntos

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt[4]{b^4 + c^4}}, \quad z = \pm \frac{c^2}{\sqrt[4]{b^4 + c^4}}.$$

Ahora suponiendo $y = z = 0$ se ha de verificar

$$a^4 + 2\lambda x^2 = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

y por tanto

$$x^2 = -\frac{a^4}{2\lambda}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Substituyendo en la ecuación de la superficie resulta

$$\frac{a^4}{4\lambda^2} = 1$$

de donde se sigue

$$2\lambda = \pm a^2.$$

Desechando la raíz positiva ya que esta produciría soluciones imaginarias de x se obtienen los dos puntos siguientes

$$x = \pm a, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Análogamente para $x = 0, z = 0$ resultan los dos puntos

$$x = 0, \quad y = \pm b, \quad z = 0$$

y para $x = 0, y = 0$ los dos puntos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm c.$$

Por último para $x = 0, y = 0, z = 0$ no hay ningún punto crítico ya que el origen no pertenece a la superficie.

Por tanto hemos obtenido un total de 26 puntos críticos que resumimos en la tabla siguiente junto con los valores de d

x	y	z	d
$\pm \frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}$	$\pm \frac{b^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}$	$\pm \frac{c^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}}$	$\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}$
$\pm \frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}$	$\pm \frac{b^2}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}$	0	$\sqrt[4]{a^4 + b^4}$
$\pm \frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + c^4}}$	0	$\pm \frac{c^2}{\sqrt[4]{a^4 + c^4}}$	$\sqrt[4]{a^4 + c^4}$
0	$\pm \frac{b^2}{\sqrt[4]{b^4 + c^4}}$	$\pm \frac{c^2}{\sqrt[4]{b^4 + c^4}}$	$\sqrt[4]{b^4 + c^4}$
$\pm a$	0	0	a
0	$\pm b$	0	b
0	0	$\pm c$	c

Por tratarse de una función continua d y una región S cerrada y acotada podemos afirmar que existen máximo y mínimo absolutos.

El máximo se alcanza en los ocho primeros puntos siendo éstos los extremos de las diagonales del paralelepípedo convexo que forma dicha superficie.

El mínimo se alcanza en los dos últimos puntos correspondiendo a los puntos de corte con el eje OZ .