CALCULO 11-M
Laboratorio
Práctica Número 7

20/04/99

1 Nuevas Instrucciones Maple

- **implicitplot3d**($expr1, x = a..b, y = c..d, z = p..q$) Superficie definida por una expresión de dos variables
- **tubeplot**($[x(t), y(t), z(t)], t = a..b, radius = r(t)$) plot de un tubo de eje la curva $x(t), y(t), z(t), a \leq t \leq b$ y secciones circulares de radio $r(t)$
- **plot3d**($expr, x = a..b, y = c..d$) plot de una expresión de dos variables x e y
- **plot3d**($f, a..b, c..d$) Gráfica de una función de dos variables
- **plot3d**($[exprf, exprg, exprh], s = a..b, t = c..d$) plot de tres expresiones
- **plot3d**($[f, g, h], a..b, c..d$) plot de tres funciones
- **contourplot**($expr, x = a..b, y = c..d$) curvas de nivel de la superficie $z = expr(x, y)$

2 Ejercicios Propuestos

2.1 Superficies

1. (1.4.4.9) *Cilindros* Representar gráficamente las siguientes ecuaciones en 3-D.

   (a) $x^2 + y^2 = 5$

   (b) $y = x^2$

   (c) $x^3 - x - z = 0$

   (d) $y^2 - z^2 = 4$

   (e) $x^3 + y^3 = 1$

2. (1.4.4.10) Representar gráficamente:

   (a) Tres cilindros de radio 1 que se cortan según los ejes coordenados.

   (b) Una esfera de radio 4 y un cilindro de radio 1 a lo largo de uno de sus diámetros.

   (c) Una esfera de radio 1 y dos planos paralelos tangentes a dicha esfera.

3. (1.4.4.11) Representar los siguientes tipos básicos de cuádricas y examinar las trazas de dichas superficies según planos paralelos a los ejes coordenados.

   (a) *Elipsoide* $3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$

   (b) *Hiperboloide de una hoja* $3x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$

   (c) *Hiperboloide de dos hojas* $3x^2 + y^2 - 2z^2 = -1$

   (d) *Cono elíptico* $3x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$

   (e) *Paraboloide elíptico* $3x^2 + y^2 - 2z = 0$

   (f) *Paraboloide hiperbólico* $3x^2 - y^2 - 2z = 0$

4. (1.4.4.12) Representar la *superficie minimal de Scher*

$$e^z \cos x = \cos y.$$

5. Representar la superficie obtenida al girar la curva

$$y = 3x, \qquad 0 \le x \le 5$$

alrededor del eje OX. Repetir en los siguientes casos

(a) $y = \sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le 4$
(b) $y = e^{-x^2}, \qquad -10 \le x \le 10$
(c) $y = x^2, \qquad 0 \le x \le 5$
(d) $y = \sin 2x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$

6. Representar las siguientes superficies tubulares

(a) Toro cuyo eje es un círculo de radio 5 y sus secciones círculos de radio 1.
(b) Dos toros encadenados de las dimensiones anteriores.
(c) Tubo cuyo eje es la hélice

$$x = 3\cos 2t, y = 3\sin 2t, z = 5t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

y sus secciones son círculos de radio 1.
(d) Tubo cuyo eje es la hélice anterior y las secciones círculos de radio $0.5 + 0.3\cos(2t)$
(e) Tubo cuyo eje es la curva

$$x = t\cos 2t, y = t\sin 2t, z = 5t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

y sus secciones círculos de radio $t^2/10$.

2.2 Funciones de dos variables

1. (8.1.3.1) Sea $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

(a) Representar gráficamente la superficie $z = f(x, y)$ para valores de (x, y) pertenecientes al recinto

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

(b) Representar conjuntamente la superficie anterior y el dominio D, éste último en el plano $z = 0$.

2. (8.1.3.2) Repetir el ejercicio anteriores con los siguientes dominios:

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq x, \ 0 \leq y\}$.

   (c) $D = A - B$ con

   $$A = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

   y

   $$B = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ 0 \leq x, \ 0 \leq y\}.$$

   (d) $D = A - B$ con

   $$A = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

   y

   $$B = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ 0 \leq x, \ 0 \leq y \leq 3x\}.$$

   (e) $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. (8.1.3.3) En los casos siguientes representar la superficie $z = f(x, y)$ sobre el dominio

   $$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

   Experimente modificando el dominio.

   (a)

   $$f(x, y) = x^2 + y^2$$

   (b)

   $$f(x, y) = 16(x^2 + y^2) + \frac{1}{x^2 + y^2}$$

   (c)

   $$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

(d)

$$f(x,y) = \frac{\sin 3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

(e)

$$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2)^{3/2}$$

4. (8.1.3.4) En los casos siguientes representar la superficie $z = f(x,y)$ sobre el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Experimente modificando el dominio.

(a)

$$f(x,y) = xy$$

(b)

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

(c)

$$f(x,y) = x(3y^2 - x^2)$$

(d)

$$f(x,y) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$$

(e)

$$f(x,y) = \cos(xy)$$

5. (8.1.3.6) Sea $f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$.
   (a) Representar las curvas de nivel de la superficie $z = f(x,y)$.
   (b) A la vista de ello trate de imaginar el aspecto de la superficie e indique donde cree que la superficie cambia lo más rápidamente.

(c) Represente la superficie junto con sus líneas de contorno y compruebe sus conjeturas anteriores.

6. (8.1.3.7) Repetir el ejercicio anterior en los siguientes casos:

   (a)
$$f(x,y) = \frac{||x| - |y||}{2} - \frac{(|x| - |y|)}{2}$$

   (b)
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

   (c)
$$f(x,y) = \frac{xye^{-xy}}{x^2 + y^2}$$

   (d)
$$f(x,y) = (\sin x)(\sin y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

7. (8.3.4.7) Sea
$$f(x,y) = 100 - 20x^2 - 30y^2.$$

   (a) Calcular f_x y f_y en el punto $P = (1,1)$
   (b) Dibujar:
      i. La superficie $z = f(x,y)$.
      ii. La curva intersección de la superficie anterior con el plano $y = 1$.
      iii. La recta del plano $y = 1$ que pasa por el punto $(1,1,f(1,1))$ y cuya pendiente es $f_x(1,1)$.
   (c) Dibujar:
      i. La superficie $z = f(x,y)$.
      ii. La curva intersección de la superficie anterior con el plano $x = 1$.

iii. La recta del plano $x = 1$ que pasa por el punto $(1, 1, f(1, 1))$ y cuya pendiente es $f_y(1, 1)$.

8. (8.3.4.8) Repetir el ejercicio anteriore en los siguientes casos:

   (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ y $P = (1, 2)$
   (b) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $P = (1/2, 1/3)$
   (c) $f(x, y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$ y $P = (1, 1)$
   (d) $f(x, y) = x^2y$ y $P = (1, -1)$

9. (8.4.3.1) Sea
$$f(x, y) = 100 - 20x^2 - 30y^2.$$

   (a) Calcular la linealización $L(x, y)$ de $f(x, y)$ en el punto $P = (1, 1)$
   (b) Dibujar la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $z = L(x, y)$.

10. (8.4.3.1) Repetir el ejercicio anterior en los siguientes casos:

   (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ y $P = (1, 2)$.
   (b) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $P = (1/2, 1/3)$.
   (c) $f(x, y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$ y $P = (1, 1)$.
   (d) $f(x, y) = x^2y$ y $P = (1, -1)$.

11. (8.6.4.1) Sea
$$f(x, y) = 100 - 20x^2 - 30y^2.$$

   (a) Calcular la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f$de f en $P = (1, 1)$ según la dirección $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ para $\theta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ y $3\pi/4$.
   (b) Dibujar:

      i. La superficie $z = f(x, y)$.
      ii. La curva descrita por $z = f(x, y)$ al variar (x, y) en la dirección $\mathbf{u}$, i.e. cuando
$$x = 1 + t\cos\theta\ ,\ y = 1 + t\sin\theta$$
      para cada uno de los valores de θ del apartado anterior.

iii. La recta del plano anterior que pasa por el punto $(1, 1, f(1, 1))$ y cuya pendiente es $D_{\mathbf{u}}f(1, 1)$.

Observe que las rectas tangentes a la superficie y forman un plano. ¿De qué plano se trata?

12. (8.6.4.2) Repetir el ejercicio anterior en los siguientes casos:

    (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ y $P = (1, 2)$
    (b) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $P = (1/2, 1/3)$
    (c) $f(x, y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$ y $P = (1, 1)$
    (d) $f(x, y) = x^2y$ y $P = (1, -1)$

13. (8.6.4.3) Sea

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

(a) Comprobar gráfica y analíticamente que f no es continua, y por tanto tampoco diferenciable, en el punto $(0, 0)$.

(b) Demostrar que a pesar de ello f admite derivadas direccionales en dicho punto según todas las direcciones $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ y que $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$ para todo θ.

(c) Dibujar:

i. La superficie $z = f(x, y)$.

ii. La curva descrita por $z = f(x, y)$ al variar (x, y) en la dirección $\mathbf{u}$, i.e. cuando

$$x = t\cos\theta \ , \ y = t\sin\theta$$

para cada uno de los valores de θ del apartado anterior.

iii. La recta del plano anterior que pasa por el punto $(0, 0, f(0, 0))$ y cuya pendiente es $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ para los mismos valores de θ usados anteriormente.

Observe que las tangentes no forman un plano. Ello se debe a que f no es diferenciable.