CALCULO 11-M
Examen Final Junio 99

17 de Junio de 1999

1 Primera Parte

Ejercicio 1 *(2 puntos) La función*

$$f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$$

carece de sentido cuando $x = 0$. Determinar el número $f(0)$ de tal modo que f sea continua en $x = 0$.

Solución:

La función $f(x)$ es producto de dos funciones, la función $\sin x$ y la función $\sin \frac{1}{x}$. Por una parte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

y por otra para todo $x \neq 0$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1.$$

Mediante la propiedad de los límites que establece que si una función tiende a cero y otra está acotada su producto también tiende a cero podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Por tanto, para que f sea continua en $x = 0$ es necesario definir $f(0) = 0$.

Ejercicio 2 *(2 puntos) Sea f una función derivable tal que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = 1.$$

1. *Justificar que $f(0) = 0$.*
2. *Probar que $f'(0) = 5/2$.*
3. *Calcular*

   $$\lim_{x\to 0} \frac{(f \circ f)(2x)}{3f^{-1}(x)}$$

   suponiendo f' continua.

Solución:

1. Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de límite podemos asegurar la existencia de un $\delta > 0$ tal que

   $$\left| \frac{f(2x^3)}{5x^3} - 1 \right| < 1$$

   para todo x tal que $0 < |x| < \delta$. De la desigualdad anterior se sigue

   $$-1 < \frac{f(2x^3)}{5x^3} - 1 < 1$$

   o lo que es equivalente

   $$0 < f(2x^3) < 10x^3.$$

   Tomando límites y utilizando la regla del encaje se obtiene

   $$\lim_{x\to 0} f(2x^3) = 0.$$

   Por otra parte, por ser f derivable, ha de ser continua, lo que implica

   $$\lim_{x\to 0} f(2x^3) = f(\lim_{x\to 0} 2x^3) = f(0).$$

   De la unicidad del límite se sigue $f(0) = 0$.

2. Por la definición de derivada

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Haciendo $h = 2x^3$ y teniendo en cuenta que cuando h,tiende a cero, $x = \sqrt[3]{h/2}$ también tiende a cero, resulta

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{2x^3} = \frac{5}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = \frac{5}{2}.$$

3. Cuando x tiende a cero el límite es de la forma $0/0$ ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(2x)}{3f^{-1}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)} = \frac{f(f(0))}{3f^{-1}(0)} = \frac{0}{0}.$$

Utilizando L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(2x)}{3f^{-1}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)'(2x)}{3\left(f^{-1}\right)'(x)}$$

Mediante la regla de la cadena

$$(f\circ f)'(2x) = [f(f(2x))]' = f'(f(2x))f'(2x)2$$

y por la regla de la derivada de la inversa

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(2x)}{3f^{-1}(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(f(2x))f'(2x)2}{3\frac{1}{f'(x)}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)f'(f(2x))f'(x)2}{3} \\ &= \frac{5}{2}\frac{5}{2}\frac{5}{2}\frac{2}{3} \\ &= \frac{125}{12}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 *(2 puntos) Probar la desigualdad*

$$1 + 2\ln x - x^2 \leq 0$$

para todo $x > 0$.

Solución:
Sea

$$f(x) = 1 + 2\ln x - x^2.$$

Es claro que la función no está definida para $x < 0$ y que $f(1) = 0$. Además su derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = 2\frac{1 - x^2}{x}.$$

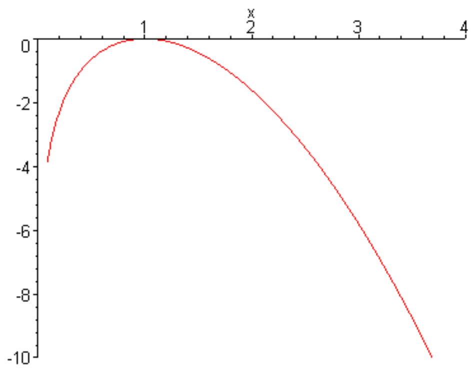
Por lo que

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & > & 0 \text{ si } 0 < x < 1 \\ f'(x) & = & 0 \text{ si } x = 1 \\ f'(x) & < & 0 \text{ si } x > 1. \end{array}$$

Estos valores de la derivada implican que f posee un máximo en $x = 1$ siendo creciente en el intervalo $(0, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Por tanto, el máximo es absoluto y

$$f(x) \leq f(1) = 0$$

para todo $x > 0$.



Ejercicio 4 *(2 puntos) Evaluar la integral*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx$$

mediante el cambio de variable

$$x - \frac{1}{x} = t.$$

Solución:

Dividiendo numerador y denominador por x^2 y teniendo en cuenta que la función a integrar es par resulta

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\, dx.$$

Diferenciando la ecuación del cambio de variable se tiene

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = dt.$$

Por otra parte elevando al cuadrado dicha ecuación obtenemos

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2$$

y por tanto

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx &= 2\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+2} \\
&= 2\int_{-\infty}^{0} \frac{\frac{1}{2}dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
&= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \sqrt{2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(2 puntos) Determinar el volumen del sólido que tiene por base la elipse*

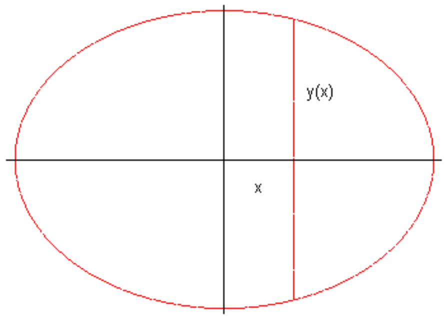
$$x^2 + 2y^2 = 1$$

y cuyas secciones transversales al eje OX son triángulos equiláteros de base la cuerda perpendicular a dicho eje.

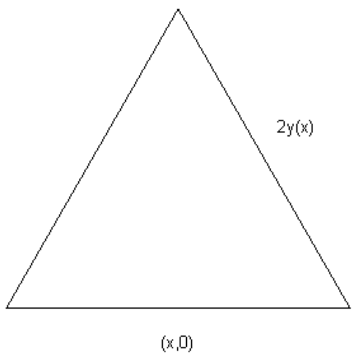
Solución:
El volumen viene determinado por la integral

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx$$

donde $A(x)$ representa el área de la sección triangular cuya base es la cuerda perpendicular al eje OX.



Base del sólido



Sección del sólido

El área de dicha sección es por tanto

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} \\ &= \frac{1}{2} 2y\sqrt{(2y)^2 - y^2} \\ &= \sqrt{3}y^2 \\ &= \sqrt{3}\frac{1}{2}(1 - x^2). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\frac{1}{2}(1 - x^2)\, dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

2 Segunda Parte

Ejercicio 6 *(2 puntos)*

1. *Evaluar la integral*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

2. *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$$

Solución:

1. Multiplicando numerador y denominador por e^x y efectuando el cambio $u = e^x$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{array} \right\} \\
&= \int_1^\infty \frac{du}{u^2+1} \\
&= [\arctan(u)]_1^\infty \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2. Sea

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!}{(n+1)^n}}{\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)+1]^{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} \frac{[(n-1)+1]^{n-1}}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Puesto que $L < 1$, aplicando el criterio del cociente podemos afirmar que la serie converge.

Ejercicio 7 *(2 puntos) Determinar el área barrida por el radio vector de la espiral $r = a\theta$ durante la segunda revolución que no hubiera sido barrida ya durante la primera.*

Solución:

Puesto que se trata de una espiral la superficie barrida por radio vector durante la segunda revolución se superpone a la superficie barrida durante la primera revolución.

El area de la superficie barrida durante la segunda revolución es

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} r^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} (a\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \theta^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= \frac{28}{3}\pi^3 a^2. \end{aligned}$$

El area de la superficie barrida durante la primera revolución es

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi} \theta^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{0}^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi^3 a^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente el área pedida es

$$A = A_2 - A_1 = 8\pi^3 a^2.$$

Ejercicio 8 *(2 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de la función*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}; \qquad f(0,0) = 0;$$

en el punto $(0,0)$.

Solución:

En primer lugar debemos calcular las derivadas parciales. Derivada parcial con respecto de x

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente, derivada parcial con respecto de y

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0k^2}{0^2+k^2} - 0}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una vez comprobada la existencia de las derivadas parciales es necesario verificar que

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{hk^2}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{hk^2}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

existe y es cero. Ahora bien, a lo largo de la recta $h = 0$

$$L_{\{h=0\}} = \lim_{k\to 0} \frac{0k^2}{(0^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

y a lo largo de la recta $h = k$

$$L_{\{h=k\}} = \lim_{k\to 0} \frac{kk^2}{(k^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{k\to 0} \frac{k^3}{2^{3/2}k^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

por lo que podemos asegurar que el límite no existe al no coincidir por dos caminos. En conclusión, la función no es diferenciable en el punto indicado.

Ejercicio 9 *(2 puntos) Probar que las superficies*

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$$

y

$$xyz = 36$$

son tangentes en el punto $(3, 6, 2)$.

Solución:

Basta comprobar que ambas superficies poseen el mismo plano tagente en el punto en cuestión o que los vectores normales son proporcionales. Sean

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 108$$

y

$$g(x,y,z) = xyz - 36.$$

Un vector normal a la superficie $f(x,y,z) = 0$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \nabla f(3,6,2) \\
&= f_x(3,6,2)\,\mathbf{i} + f_y(3,6,2)\,\mathbf{j} + f_z(3,6,2)\,\mathbf{k} \\
&= 8x|_{(3,6,2)}\ \mathbf{i} + 2y|_{(3,6,2)}\ \mathbf{j} + 18z|_{(3,6,2)}\ \mathbf{k} \\
&= 24\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 36\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Un vector normal a la superficie $g(x,y,z) = 0$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_2 &= \nabla g(3,6,2) \\
&= g_x(3,6,2)\,\mathbf{i} + g_y(3,6,2)\,\mathbf{j} + g_z(3,6,2)\,\mathbf{k} \\
&= yz|_{(3,6,2)}\ \mathbf{i} + xz|_{(3,6,2)}\ \mathbf{j} + xy|_{(3,6,2)}\ \mathbf{k} \\
&= 12\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{n}_2$ ambos vectores definen el mismo plano tangente en el punto $(3,6,2)$.

Ejercicio 10 *(2 puntos) La temperatura en una región espacial viene dada por la función*

$$T = 400xyz^2.$$

Determinar los puntos de mayor y menor temperatura sobre la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Solución:
Se trata de estudiar los máximos y mínimos de

$$f(x,y,z) = \frac{T}{400} = xyz^2$$

en la región

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Según el método de Lagrange los extremos del problema anterior son puntos críticos de la función

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Dichos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcl} L_x & = & yz^2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y & = & xz^2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z & = & 2xyz + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda & = & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{array}$$

Multiplicando las tres primeras ecuaciones por $2x$, $2y$ y z respectivamente resulta

$$\begin{array}{rcl} 2xyz^2 + 4\lambda x^2 & = & 0 \\ 2xyz^2 + 4\lambda y^2 & = & 0 \\ 2xyz^2 + 2\lambda z^2 & = & 0 \end{array}$$

de donde se sigue

$$4\lambda x^2 = 4\lambda y^2 = 2\lambda z^2.$$

Para $\lambda \neq 0$ se tiene

$$x^2 = y^2 = \frac{z^2}{2}.$$

Substituyendo en la ecuación de la esfera resulta

$$\frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} + z^2 = 1$$

y por tanto las soluciones del sistema verifican

$$x^2 = y^2 = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Dichas ecuaciones proporcionan 8 puntos críticos cuyas coordenadas son

$$x = \pm\frac{1}{2}; y = \pm\frac{1}{2}; z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para $\lambda = 0$ las tres primeras ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} yz^2 &= 0 \\ xz^2 &= 0 \\ xyz &= 0 \end{aligned}$$

que implican $y = z = 0$ o $x = z = 0$ o $x = y = 0$. Dichas ecuaciones son las ecuaciones de los tres eje coordenados cuyos puntos de corte con la esfera son los puntos

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

respectivamente.

Puesto que la función T y por consiguiente f es una función continua y la esfera es un conjunto cerrado y acotado ha de existir máximo y mínimo absolutos. Estos se alcanzarán necesariamente en alguno de los catorce puntos obtenidos anteriormente.

x	y	z	$T = 400f$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	50
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	50
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	-50
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	-50
± 1	0	0	0
0	± 1	0	0
0	0	± 1	0

El máximo $T = 50$ se alcanza en los cuatro primeros puntos y el mínimo $T = -50$ en los cuatro siguientes.