CALCULO 11-M
INTEGRACION

June Amillo

17/01/00

Contenido

1 Introducción

Al hablar de integración se distinguen dos tipos de integrales, las integrales *definidas* y las integrales *indefinidas*. Las primeras dan respuesta a problemas como calcular el área encerrada por una curva o calcular el espacio recorrido por un móvil conocida su velocidad. Las segundas permiten reconstruir funciones conociendo sus derivadas.

En un principio pudiera parecer que estas dos integrales no tuvieran nada que ver entre sí pero en realidad existe una estrecha relación entre ellas.

2 Integrales Indefinidas

El problema de calcular la función o funciones que tengan como derivada una determinada función se resuelve mediante la integral indefinida. Por ello, integración indefinida y derivación son procesos inversos.

2.1 Antiderivadas

Dada una función f una **antiderivada** o **primitiva** de f es otra función F que satisface, $F'(x) = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f. Es decir, una antiderivada de f es una solución $y = F(x)$ de la *ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

En un principio puede parecer que tratar de obtener todas las antiderivadas de una función sea una tarea harto extensa y complicada. No obstante, este problema se simplifica al reducirse a encontrar una antiderivada particular.

En efecto, si F es una antiderivada de f y C una constante, se tiene

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + 0 = f(x)$$

lo que quiere decir que la función $F + C$ es también una antiderivada de f.

Recíprocamente, sean F y G antiderivadas de f en el intervalo I. Entonces,

$$\frac{d}{dx}(F - G)(x) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

y como consecuencia del Teorema del valor Medio del Cálculo Diferencial resulta que $F - G$ es una constante en dicho intervalo. Por tanto, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea f una función definida en un intervalo I y F una antiderivada particular de f en dicho intervalo. Entonces,*

1. *Para toda constante C la función $G(x) = F(x) + C$ es también una antiderivada de f y recíprocamente*

2. *Si $G(x)$ es una antiderivada cualquiera de f existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.*

En consecuencia si existe una antiderivada, existen infinitas y todas se diferencian en una constante. El conjunto formado por todas estas antiderivadas se llama integral indefinida.

Definición 2 *Si una función f posee antiderivadas al conjunto formado por todas sus antiderivadas se conoce como* ***integral indefinida*** *de f con respecto de x y se le representa por*

$$\int f(x)\, dx.$$

El símbolo $\int$ es el ***signo integral****, la función f el* ***integrando*** *y la x la* ***variable de integración.***

Como consecuencia del teorema anterior, conocida una antiderivada particular F de f podemos escribir

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

donde C una constante arbitraria llamada *constante de integración.* Es necesario indicar que esta propiedad solo es válida cuando el dominio sea un intervalo.

2.2 Integrales Inmediatas

Muchas de las integrales necesarias en el cálculo científico se obtienen leyendo en sentido inverso las reglas de derivación de algunas funciones elementales. Estas integrales se denominan inmediatas.

$$\int 0 \; dx = C \qquad \int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \tfrac{1}{x} \; dx = \ln|x| + C \qquad \int e^x \; dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \; dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \; dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x \; dx = -\csc x + C$$

$$\int \sinh x \; dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x \; dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C$$

2.3 Propiedades de las Integrales Indefinidas

Las propiedades básicas del cálculo de derivadas —derivada de la suma, derivada del producto por una constante, derivada del producto de dos funciones y derivada de la composición— leídas hacia atrás dan lugar a las siguientes propiedades de la integral indefinida.

Teorema 3 *Sean f y g funciones y k constante. Entonces:*

1. ***Aditividad***

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

2. ***Producto por escalar***

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

3. ***Fórmula de la integración por partes*** *Si f y g son derivables*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

4. ***Fórmula del cambio de variables*** *Si F es una primitiva de f y g es derivable*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

2.4 Métodos para el Cálculo de Antiderivadas

Hemos visto que la integral indefinida es una familia de funciones y que para determinar todas ellas basta con encontrar una antiderivada particular y añadirle una constante arbitraria.

Encontrar una antiderivada particular puede ser una tarea desde muy simple a muy complicada o incluso imposible. Una antiderivada particular puede ser encontrada a mano, consultando una tabla de integrales o mediante una computadora. Los Sistemas de Computación Matemático como Maple son verdaderos expertos en esta tarea y cada vez es menos necesario basarse en técnicas formales de integración.

La obtención de antiderivadas particulares a mano se efectúa con la ayuda de las propiedades de la integración indefinida mencionadas anteriormente. Los métodos utilizados tiene un carácter heurísticos y se basan en la forma especial del integrando.

Es necesario indicar que dada una función elemental no siempre es posible encontrar una antiderivada que sea expresable en terminos de funciones elementales. Por ejemplo, no existe —y por tanto no es posible encontrarla— una función elemental cuya derivada sea cualquiera de las siguientes funciones

$$\frac{\sin x}{x},\ e^{-x^2},\ \sqrt{1+x^4},\ \text{etc.}$$

Aunque como veremos más adelante éstas funciones admiten primitivas se puede asegurar que ninguna de ellas es una función elemental. Esta es una diferencia notable entre el cálculo diferencial y el integral. La derivada de una función elemental siempre es una función elemental pero la antiderivada de una función elemental puede no ser elemental.

2.5 Problemas de Valores Iniciales

Puesto que una función admite infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante, para recuperar una función partiendo de su derivada es necesario conocer algo más acerca de la función original. Cuando este dato adicional es el valor de la función en un punto determinado estamos ante lo que se conoce como *problema de valores iniciales.*

Definición 4 *Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I y (x_0, y_0) un punto del plano XY tal que $x_0 \in I$. Un* ***problema de valores iniciales*** *consiste en encontrar una función y de x tal que satiafaga la* ***ecuación diferencial***

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

y la ***condición inicial***

$$y(x_0) = y_0.$$

La definición anterior abarca los problemas de valores iniciales más simples y los unicos que trataremos aquí. Otros problemas típicos y objeto de un curso de cuaciones deferenciales incluyen ecuaciones con un segundo miembro que es a su vez función de la propia y.

La resolución de un problema de valores iniciales se lleva a cabo en dos pasos:

1. Se determina la *solución general* de la ecuación diferencial. En nuestro caso esta solución está formada por la integral indefinida de $f(x)$, es decir por la familia de funciones cuya derivada coincide con $f(x)$. Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva particular de $f(x)$ se tiene

$$y = F(x) + C.$$

2. Se determina la *solución particular* que satisface las condiciones iniciales. para ello se se calcula el valor de C tal que haga

$$y(x_0) = F(x_0) + C = y_0$$

es decir

$$C = y_0 - F(x_0)$$

resultando

$$y = y_0 + F(x) - F(x_0).$$

3 Integrales Definidas

La integración junto con la diferenciación son los dos temas centrales del Cálculo. Mientras que la derivada en un punto proporciona información local como la pendiente de una curva o la velocidad de un móvil en un instante, la integral definida suministra información global como el área bajo una curva o el espacio recorrido por un móvil.

3.1 Dos Problemas

Empezaremos presentando dos ejemplos, uno geométrico y otro físico, que conducen de forma natural al concepto de integral definida o integral de Riemann.

3.1.1 Area Limitada por una Curva y el eje OX

Sea Γ la curva descrita por la gráfica de una función real f definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de determinar o más bien definir el área comprendida entre la curva Γ, el eje OX y las rectas $x = a$ e $y = b$.

En algunos casos ésto es sencillo, por ejemplo cuando la curva sea un trozo de recta o cuando sea una semicircunferencia bastaría con utilizar las fórmulas del área desarrolladas por la geometría elemental. Ahora bien, ?‘cómo determinar o definir el área cuando la curva sea un arco de parábola $y = x^2$ o en general una curva más complicada $y = f(x)$?

En primer lugar procederemos a estimar dicha área mediante rectángulos. Para ello podemos subdividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

y para cada $i = 1 \ldots n$ construir un rectángulo con base el subintervalo

$$I_i = [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$$

y altura el valor de f en el punto medio

$$c_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$$

del mismo. El área de cada rectángulo es

$$f(c_i)\Delta x = f\left(a + (i - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

y el área de la región encerrada por los n rectángulos proporciona una estimación del área buscada

$$\text{Area Aproximada } = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

Otras estimaciones resultan de escoger como altura de los rectángulos los extremos de la izquierda

$$c_i = a + (i-1)\Delta x$$

o los extremos de la derecha

$$c_i = a + i\Delta x$$

o cualquier punto arbitrario c_i dentro de cada subintervalo. Así mismo se podría haber partido de una subdivisión en subintervalos de diferentes longitudes Δx_i. Todas estas estimaciones conducen a sumas del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

que representan valores aproximados del área. Al disminuir la longitud de los subintervalos, y en consecuencia aumentar n, se obtendrán estimaciones cada vez más precisas. El área buscada corresponderá al límite de dichas estimaciones

$$\text{Area } = \lim \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

3.1.2 Distancia Recorrida por un Móvil

Si un móvil se mueve a velocidad constante v la distancia recorrida por el mismo en un intervalo de tiempo T es $D = vT$. Pero, ?'Cuál es la distancia recorrida si se mueve a una velocidad variable $v(t)$?

Para estimar dicha distancia podemos subdividir el período total T en períodos de observación más pequeños de duración

$$\Delta t = \frac{T}{n}.$$

A continuación y durante cada período de observación anotamos la velocidad en el instante medio

$$c_i = (i - \frac{1}{2})\Delta t.$$

La distancia recorrida por el móvil en cada subintervalo de tiempo es, aproximadamente,

$$v(c_i)\Delta t = v\left((i - \frac{1}{2})\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}$$

y la distancia total recorrida en todo el período $[0, T]$ es

$$\text{Distancia Aproximada } = \sum_{i=1}^{n} v\left((i - \frac{1}{2})\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}.$$

Como instante de observación podíamos haber tomado el instante inicial de cada subintervalo, el instante final o cualquier otro instante arbitrario c_i correspondiente a cada subintervalo. Así mismo podíamos haber tomado períodos de observación de duración diferente Δt_i. Las sumas así obtenidas también sirven de estimación de la distancia total recorrida. Todas ellas son de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

Su límite al disminuir la longitud de los períodos de observación será la distancia total recorrida durante el tiempo T

$$\text{Distancia } = \lim \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

3.2 La Integral de Riemann.

Se llama *partición* del intervalo $[a, b]$ a una sucesión finita de puntos

$$P = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$$

tales que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ designamos por Δx_i a la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i.e.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

La mayor de estas longitudes se llama *malla* o *norma* de la partición y se denota por $||P||$, i.e.

$$||P|| = \max(\Delta x_i, i = 1, \ldots, n)$$

Definición 5 *Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ una partición de dicho intervalo. Se llama **suma de Riemann** de f relativa a la partición P a toda suma del tipo*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

donde cada c_i es un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Los puntos c_i se conocen como puntos de evaluación de f.

Definición 6 *Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que el número I es **límite** de las sumas de Riemann $S(f, P)$ cuando $\|P\|$ tiende a 0 y se escribe*

$$I = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $P = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ satisfaciendo $||P|| < \delta$ se cumple

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I| < \epsilon$$

independientemente de la elección de los c_i.

La definición anterior plantea las cuestiones de existencia y unicidad del límite de las sumas de Riemann de una función. Es decir, ¿existe el límite de las sumas de Riemann?, ¿es único?. De forma análoga al caso del límite de una función es fácil demostrar que el límite de las sumas de Riemann si existe ha de ser único. La existencia del límite no está garantizada en general pero se puede asegurar su existencia para las funciones continuas. La demostración formal de ambos resultados corresponde a un curso de teoría de la integral.

Definición 7 *Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$ continua. El límite I de las sumas de Riemann correspondientes a f se llama **integral definida** o **integral de Riemann** de f en el intervalo $[a, b]$ y se representa por el símbolo*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La variable x se llama *variable de integración*. Dicha variable no juega ningún papel especial en la notación dada para la integral y se podía haber utilizado otro símbolo o incluso se podía haber prescindido de ella. Los siguientes símbolos denotan la misma integral I

$$\int_a^b f(x)\, dx, \int_a^b f(t)\, dt, \int_a^b f.$$

La función f se conoce como *integrando* y los extremos a y b como *límites de integración*, *inferior* y *superior* respectivamente.

3.3 Propiedades de las Integrales Definidas

La definición de integral se extiende para incluir dos casos particulares. Si $b = a$ se define

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

y si $b < a$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Como consecuencia de la definición se establecen las siguientes propiedades.

Teorema 8 *Sean f y g funciones continuas. Entonces:*

1.
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Si k una constante*
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Si a, b y c son números reales se cumple*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ se verifica*
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. *Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$ se cumple*
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

6. *Si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$ se cumple*
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

3.4 Integración de Funciones Definidas a Trozos

En algunos casos es necesario integrar funciones definidas por partes. Si la función está definida mediante una función continua en cada una de sus partes podremos definir la integral como la suma de las integrales de estas funciones en el subintervalo correspondiente. Por sencillez en la notación consideramos solo el caso de una función definida en dos partes. La definición es análoga para funciones definidas en tres o más partes.

Definición 9 *Sea f una función definida en dos partes en el intervalo $[a, b]$ y continua a trozos, i.e. tal que siendo $a \le c \le b$ existen funciones f_1 y f_2 continuas en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente tales que*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ a \le x \le c \\ f_2(x) & si\ c < x \le b \end{cases}.$$

Entonces se define la integral de f en el intervalo $[a, b]$ mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx.$$

3.5 Teorema del Valor Medio

Lo mismo que para las derivadas existe una versión del teorema del valor medio para integrales. Intuitivamente, si f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, este teorema expresa que existe un valor de la función tal que el rectángulo cuya altura es dicho valor proporciona la misma área que la función.

Teorema 10 *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe un número $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

El teorema anterior no da ninguna información del punto c excepto la de su existencia. No obstante, despejando $f(c)$ en la fórmula anterior se obtiene

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Con objeto de interpretar el valor de f en c podemos escribir la integral como límite de las sumas de Riemann correspondientes a particiones del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

De esta forma resulta

$$
\begin{aligned}
f(c) &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i)\Delta x}{b-a} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i)}{n} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(c_1) + \cdots + f(c_n)}{n}.
\end{aligned}
$$

Esto sugiere considerar a $f(c)$ como el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$.

Definición 11 *Sea f una función integrable en $[a, b]$. Se llama **valor medio** de f en dicho intervalo al número*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

3.6 Teoremas Fundamentales del Cálculo

3.6.1 Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ podemos considerar la integral de f en el intervalo $[a, x]$. De esta forma a cada x le corresponde un valor $F(x)$, a saber,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Se define así una función F en el intervalo $[a, b]$. Si f es positiva esta nueva función F proporciona el área encerrada por la gráfica de f entre a y x. Ahora cabe preguntarse, ?‘A qué ritmo cambia dicha área cuando varía x? De otro modo, ?‘cuál es la derivada de $F(x)$ con respecto de x?

Dado un incremento Δx en x, el incremento correspondiente en F es la diferencia entre el área encerrada en el intervalo $[a, x + \Delta x]$ y la correspondiente al intervalo $[a, x]$. Para Δx pequeño este incremento es aproximadamente $f(x)\Delta x$. En consecuencia,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \approx f(x)$$

lo que sugiere el siguiente teorema:

Teorema 12 *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. La función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

es diferenciable en (a, b) y se verifica que

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Este teorema muestra que la derivación y la integración pueden considerarse procesos inversos. También asegura que toda función continua admite antiderivada.

3.6.2 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

De acuerdo con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una primitiva particular. En consecuencia, cualquier otra primitiva será de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C$$

siendo C una constante por determinar. De la fórmula anterior se deduce

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(\int_a^b f(t)\, dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\, dt + C\right) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

Por tanto, si se dispone de una primitiva F de f la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se puede determinar calculando la diferencia $F(b) - F(a)$. Esto es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 13 (Regla de Barrow) *Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y F una primitiva o antiderivada de f, i.e. $F' = f$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

En todos aquellos casos en que se disponga de una antiderivada expresada en términos de funciones elementales evaluar una integral definida es inmediato y el resultado se puede dar en forma cerrada o exacta. En los demás casos solo se podrá obtener un valor aproximado mediante la aplicación de algún procedimiento de aproximación numérica. A parte de que muchas integrales teóricamente puedan calcularse de forma exacta, con o sin la ayuda de una computadora, las modernas herramientas de computación permiten poder estimar una integral definida con la precisión que se desee.

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo junto con las fórmulas de integración por partes y del cambio de variables para la obtención de primitivas permiten obtener las siguientes reglas para el cálculo de integrales definidas.

Corolario 14 (Integracion por partes) *Si f y g son diferenciables y con derivada continua se verifica*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Corolario 15 (Cambio de variables) *Sea f continua y g diferenciable con derivada continua. Entonces,*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

3.7 Funciones Definidas por Integrales

3.7.1 Integrales Dependientes del Extremo Superior

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ la integral de f en el intervalo $[a,x]$ proporciona la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

En ciertas ocasiones no es posible representar la función F mediante una expresión más simple como combinación de funciones elementales. Por ejemplo, Joseph Liouville en 1835 demostró que la función

$$\int_a^x \sin(t^2)\, dt$$

no es una función elemental. En estos casos decimos que la función F es una *función definida mediante una integral dependiente del extremo superior.* La única forma posible de evaluar estas funciones será mediante estimación numérica. No obstante, el Primer Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que son diferenciables y su derivada es la función integrando, i.e.

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

En general es posible considerar funciones mediante integrales en los que el extremo superior sea una función $v(x)$

$$G(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt.$$

La función G puede escribirse como composición de otras dos haciendo $v = v(x)$ en

$$F(v) = \int_a^v f(t)\, dt$$

resultando

$$G(x) = F(v(x)).$$

Para obtener la derivada de esta función ahora tendremos en cuenta la Regla de la Cadena junto con el primer Teorema Fundamental del Cálculo. Suponiendo $v(x)$ diferenciable resulta

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(v(x))v'(x) \\ &= f(v(x))v'(x). \end{aligned}$$

Más generalmente, podemos suponer ambos extremos de la integral como funciones $u(x)$ y $v(x)$ diferenciables. La integral

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

define una función G de x diferenciable y su derivada es

$$G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

3.7.2 La Función Logaritmo y La Función Exponencial

La idea de definir nuevas funciones mediante integrales dependientes del extremo superior permite dar una definición de la función logaritmo y su inversa la función exponencial a partir de las cuales es fácil obtener todas sus propiedades.

Definición 16 *Para cada $x > 0$ se define la* ***función logaritmo*** *de x como la integral*

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Teorema 17 *Propiedades de la función logaritmo:*

1. *El dominio es el intervalo $(0, \infty)$.*
2. *Es diferenciable y por consiguiente continua siendo*
$$L'(x) = \frac{1}{x}.$$
3. *Es estrictamente creciente en todo el dominio.*
4. $$L(1) = 0.$$
5. *Para todo $x, y > 0$ se verifica*
$$L(xy) = L(x) + L(y).$$
6. *Para todo entero n se verifica*
$$L(x^n) = nL(x).$$
7. *Para todo $x, y > 0$ se verifica*
$$L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y).$$

8. *Además*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} L(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \longrightarrow 0} L(x) = -\infty$$

Puesto que la función logaritmo es estrictamente creciente posee una inversa.

La función logaritmo es continua, $L(1) = 0$ y L alcanza valores tan grandes como se quiera. Por la propiedad de los valores intermedios de las funciones continuas podemos asegurar que existe una solución de la ecuación $L(x) = 1$. Además, por ser L estrictamente creciente esta solución debe ser única.

Definición 18 *Se llama **número** e a la única solución de la ecuación* $L(x) = 1$.

Definición 19 *La **función exponencial** es la inversa de la función logaritmo y se representa por* $E(x)$ *o* $\exp(x)$.

Teorema 20 *Propiedades de la función exponencial:*

1. *El dominio es todo el intervalo* $(-\infty, +\infty)$.

2. *Es creciente, continua y diferenciable siendo*

$$E'(x) = E(x).$$

3.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} E(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \longrightarrow -\infty} E(x) = 0.$$

4. *Para todo* x, y

$$E(x + y) = E(x)E(y).$$

5.

$$E(0) = 1.$$

6. *Para todo* r *se verifica*

$$E(r) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^x.$$

3.8 Integrales Impropias

La integral de Riemann puede ser extendida a intervalos de integración infinitos y al caso de funciones no acotadas mediante un proceso de límite. Las integrales en estos casos se llaman *integrales impropias.*

3.8.1 Integrales de Intervalo Infinito

Definición 21 *Sea f una función continua para todo $x \geq a$. Se define la integral impropia de f desde a hasta $+\infty$ mediante*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$

siempre que dicho límite exista. En dicho caso se dice que la integral converge*. En el caso contrario se dice que la integral* diverge*.*

De forma análoga se puede definir la integral de $-\infty$ hasta a

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt$$

y por último combinar ambas definiciones para considerar la integral de $-\infty$ a $+\infty$ mediante la descomposición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

3.8.2 Integrales de Funciones no Acotadas

Definición 22 *Sea f una función definida y continua en el intervalo $[a, b)$ y no acotada en las proximidades de b. Se define la integral impropia de f en $[a, b]$ mediante*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$

De forma análoga se puede definir la integral $[a, b]$ cuando f no esté acotada en las proximidades de a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$$

y por último combinar ambas definiciones para considerar la integral en $[a, b]$ cuando f no esté acotada en las proximidades de un punto interior $c \in (a, b)$ mediante la descomposición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4 Aplicaciones del Cálculo Integral

La integral tiene multitud de aplicaciones en las diferentes ramas de las ciencias. A continuación nos limitaremos a dar algunas aplicaciones a la geometría y en particular al cálculo de áreas planas y de volúmenes de algunos tipos de sólidos.

4.1 Area de Figuras Planas

El área debajo de una curva nos condujo directamente al concepto de integral. Así, si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$ el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ puede ser interpretada como la integral

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Con un poco más de generalidad podemos suponer dos funciones continuas f y g tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a, b]$ y considerar la región R limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Tomando una partición $P = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ del intervalo $[a, b]$ podemos dividir la región R en n franjas cada una limitada por las rectas $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$. Si la norma de P es pequeña podemos aproximar el área ΔA_i de la franja i-ésima por la de un rectángulo de base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $f(c_i) - g(c_i)$ siendo c_i un punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta A_i \approx (f(c_i) - g(c_i))\,\Delta x_i.$$

De esta forma el área A de la región R es aproximadamente la suma

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} (f(c_i) - g(c_i))\,\Delta x_i$$

lo que sugiere la siguiente definición:

Definición 23 *Sean f y g dos funciones reales continuas en $[a, b]$ y tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Se define el* ***área*** *de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ mediante la integral*

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Obsérvese que en la fórmula anterior no se exige que f y g sean positivas. Si así lo fueran el área limitada por f y g podría interpretarse como el área debajo de f menos el área debajo de g.

4.2 Volúmenes de Sólidos

Una aplicación importante de la integral es el cálculo de volúmenes de objetos tridimensionales con formas determinadas. En concreto, estudiaremos los que se conocen como sólidos de revolución. Estos sólidos se obtienen haciendo girar una región plana alrededor de un eje. También estudiaremos sólidos de formas arbitrarias con secciones conocidas.

4.2.1 Sólidos de Revolución: Método de discos

Sea f una función continua y positiva en $[a, b]$ y R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Al girar la región R alrededor del propio eje OX se obtiene un sólido de revolución. Se trata de determinar el volumen de dicho sólido.

Tomando una partición $P = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ del intervalo $[a, b]$ podemos dividir la región R en n franjas cada una limitada por las rectas $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$. Si la norma de P es pequeña podemos aproximar el volumen ΔV_i generado al girar la franja i-ésima por el de un *disco* cilíndrico de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y radio $f(c_i)$ siendo c_i un punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta V_i \approx \pi f(c_i)^2\, \Delta x_i.$$

De esta forma el volumen V del sólido generado al girar la región R alrededor del eje X es aproximadamente la suma

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i)^2\, \Delta x_i$$

lo que sugiere la siguiente definición:

Definición 24 *Sea f una función real continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Se define el* ***volumen*** *del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OX mediante la integral*

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

4.2.2 Sólidos de Revolución: Método de capas

Sea f una función continua y positiva en $[a, b]$ y R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.. Al girar la región R alrededor del eje OY se obtiene un nuevo sólido de revolución. Se trata de determinar el volumen de éste sólido.

Tomando una partición $P = \{x_i, i = 0, \dots, n\}$ del intervalo $[a, b]$ podemos dividir la región R en n franjas cada una limitada por las rectas $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$. Si la norma de P es pequeña podemos aproximar el volumen ΔV_i generado al girar la franja i-ésima alrededor del eje Y por la de una *capa* cilíndrica de radio interior x_{i-1}, radio exterior x_i y altura $f(c_i)$ siendo c_i el punto medio del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta V_i \approx 2\pi c_i f(c_i) \, \Delta x_i.$$

De esta forma el volumen V del sólido generado al girar la región R es aproximadamente la suma

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i) \, \Delta x_i$$

lo que sugiere la siguiente definición:

Definición 25 *Sea f una función real continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Se define el* ***volumen*** *del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OY mediante la integral*

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx.$$

4.2.3 Sólidos de Secciones Conocidas

El método de discos usado para calcular volúmenes de revolución puede ser generalizado al caso de sólidos arbitrarios siempre que se conozca el área de sus secciones. En efecto, el volumen de revolución viene dado por la fórmula

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

En dicha expresión el producto $\pi f(x)^2$ representa el área de la sección circular obtenida cortando el sólido de revolución por un plano perpendicular al eje X en x. En general, si $A(x)$ denota el área de la sección perpendicular al eje X en x de un sólido arbitrario su volumen se define mediante la integral

$$V = \int_a^b A(x) \, dx.$$