

CALCULO 11-M
Notas de Clase
Funciones

June Amillo

20 de Septiembre del 2000

Contenido

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Funciones | 2 |
| 1.1 | Concepto de Función | 2 |
| 1.2 | Representación de Funciones | 3 |
| 1.2.1 | Expresiones | 3 |
| 1.2.2 | Algoritmos | 4 |
| 1.2.3 | Listas | 6 |
| 1.2.4 | Tablas | 6 |
| 1.2.5 | Gráficas | 7 |
| 2 | Combinación de Funciones | 7 |
| 2.1 | Algebra de Funciones | 7 |
| 2.2 | Composición de Funciones | 8 |
| 2.3 | Funciones como Combinación de Funciones | 8 |
| 2.4 | Funciones Inversas | 9 |
| 3 | Propiedades | 11 |
| 3.1 | Ceros | 11 |
| 3.2 | Paridad e Imparidad. Simetrías. | 13 |
| 3.3 | Máximos y Mínimos | 14 |
| 3.4 | Cotas. Supremo e Infimo | 15 |
| 3.5 | Crecimiento y Decrecimiento. Monotonía | 16 |
| 3.6 | Concavidad y Convexidad | 16 |
| 4 | Funciones Elementales | 17 |
| 4.1 | Funciones Polinómicas | 17 |
| 4.2 | Funciones Racionales | 18 |
| 4.3 | Funciones Algebraicas | 18 |
| 4.4 | Funciones Transcendentes | 19 |
| 4.5 | Funciones Trigonómicas | 19 |
| 4.5.1 | Radianes | 19 |
| 4.5.2 | Funciones Seno y Coseno | 19 |
| 4.5.3 | Otras Funciones Trigonómicas | 20 |
| 4.5.4 | Periodicidad | 21 |
| 4.5.5 | Identidades Trigonómicas | 21 |
| 4.6 | Funciones Trigonómicas Inversas | 23 |
| 4.6.1 | Función Seno Inversa | 23 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.6.2 | Función Coseno Inversa | 23 |
| 4.6.3 | Función Tangente Inversa | 24 |
| 4.6.4 | Otras Trigonómicas Inversas | 25 |
| 4.7 | Funciones Exponenciales y Logarítmicas | 26 |
| 4.7.1 | Función Logaritmo | 26 |
| 4.7.2 | Función exponencial | 27 |
| 4.7.3 | Exponenciales y Logaritmos de base cualquiera | 27 |
| 4.7.4 | Potencias de Exponente Real | 28 |
| 4.8 | Funciones Hiperbólicas | 28 |
| 4.8.1 | Seno y Coseno Hiperbólicos | 29 |
| 4.8.2 | Otras Funciones Hiperbólicas | 30 |
| 4.8.3 | Identidades Hiperbólicas | 30 |
| 4.8.4 | Funciones Hiperbólicas Inversas | 31 |

1 Funciones

1.1 Concepto de Función

Existen situaciones en geometría, en física, en economía y en todas las ciencias en general en las que ciertas magnitudes dependen del valor de otras. Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado, el espacio recorrido por un móvil en un tiempo determinado depende de su velocidad, el número de ventas de un producto depende de su precio, etc. Todas estas situaciones se describen matemáticamente mediante funciones.

Definición 1 Sean X e Y dos conjuntos y D un subconjunto de X . Una **función** f de $D \subset X$ en Y es un proceso que asigna a cada elemento $x \in D$ un único elemento de Y que se denota por $f(x)$. El conjunto D se llama **dominio** de f y el conjunto $R = \{f(x) \in Y / x \in D\}$ **recorrido**.

Si escribimos $y = f(x)$, se dice que x es la *variable independiente* o *argumento* e y la *variable dependiente* o *valor* de la función en x .

De acuerdo con la definición, una función puede ser interpretada como una máquina que recibiendo una *entrada* x inicia un proceso f , el cual da como resultado una *salida* $f(x)$ correspondiente a dicha entrada.

Esta interpretación sugiere el siguiente criterio de igualdad de funciones:

Definición 2 Dos funciones f y g de $D \subset X$ en Y son iguales, y se escribe $f = g$ si y sólo si para cada $x \in D$ se verifica $f(x) = g(x)$.

Aunque en general los conjuntos X e Y pueden ser de cualquier tipo en Cálculo éstos son usualmente la recta real \mathcal{R} o el espacio \mathcal{R}^n .

Si $X = \mathcal{R}$ se dice que f es una *función de una variable real*. Si X es el conjunto de pares ordenados de números reales, i.e. $X = \mathcal{R}^2$, se dice que f es una *función de dos variables reales*. En general si X es el conjunto de n -tuplas ordenadas de números reales, i.e. $X = \mathcal{R}^n$, $n \geq 2$, se dice que f es una *función de n variables reales*.

El caso particular de una función f de una variable cuyo dominio sea el conjunto de los enteros positivos se llama *sucesión*. La imagen del entero n se llama *término n -ésimo* y se escribe $f(n) = x_n$.

Cuando Y sea el conjunto de números reales \mathcal{R} , se dice que f es una *función real o escalar*. Si $Y = \mathcal{R}^m$, $m \geq 2$, se dice que f es una *función vectorial de m componentes reales*.

1.2 Representación de Funciones

Las funciones se pueden representar mediante expresiones, algoritmos, listas, tablas y gráficas. Ninguna de ellas es en sí misma mejor que las otras. Todas ellas ofrecen aspectos diferentes de la función que se complementan entre sí. A continuación analizaremos cada uno de estos modos de representación.

1.2.1 Expresiones

La forma más simple de construir funciones es mediante una expresión o fórmula matemática. Una *expresión* es una combinación legal de símbolos y operadores matemáticos, por ejemplo: $x^2 + 4x - 5$. Si definimos la función f mediante la expresión anterior, i.e.

$$f(x) = x^2 + 4x - 5,$$

el valor de f en $x = 3$ se obtiene substituyendo x por 3 en dicha expresión y efectuando las operaciones correspondientes, así

$$f(3) = 3^2 + 4 \times 3 - 5 = 16.$$

Cuando se construye una función de esta forma su dominio está limitado por el conjunto de entradas para los cuales la expresión produce un resultado. Por ejemplo, la expresión

$$\sqrt{x - 1}$$

no produce ninguna salida real para valores $x < 1$, por consiguiente el dominio de una función definida mediante dicha expresión deberá estar incluido en el conjunto $x \geq 1$. En estos casos si no se especifica el dominio explícitamente se entiende que éste es el conjunto de los x para los que la expresión permite obtener un valor perteneciente a Y .

1.2.2 Algoritmos

Muchas funciones necesitan de estructuras de control lógicas, como las que se utilizan en los lenguajes de programación, para poder ser definidas. En este caso se dice que están definidas mediante un *algoritmo*. Como antes el dominio está limitado por las entradas que procesadas de acuerdo con los pasos del algoritmo produzcan una salida admisible o bien por la situación que da lugar a la función. En cualquier caso el dominio puede ser incluido al comienzo del algoritmo para que éste no procese las entradas que no pertenezcan al dominio.

A continuación presentamos dos tipos de funciones usadas frecuentemente en matemáticas que se definen mediante algoritmos.

Se llaman *funciones a trozos* aquellas que presentan un dominio dividido en diferentes partes pudiendo ser diferente el proceso que se aplica en cada una de ellas. Por ejemplo, la función *valor absoluto* que asigna a cada número real positivo x el propio x y a cada número real negativo el valor $-x$. En este caso el dominio es todo el conjunto de los números reales, pero se aplica un proceso diferente según se trate de los números positivos o negativos. Escribiremos

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

La definición formal de estas funciones requiere el uso de la estructura de control conocida como *if-then-else* o simplemente *if*. Esta estructura ofrece dos alternativas dependiendo de si se cumple o no una determinada condición. Por ejemplo, la función valor absoluto se expresa de la siguiente forma:

```
if  $x \geq 0$  then  $x$ 
      else  $-x$ .
```

La estructura *if* puede incluir a su vez otras estructuras *if* para describir

dominios con más de dos partes. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -1 + x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

puede expresarse de la siguiente forma:

```
if  $x \leq 1$  then  $-1 - x$   
    else if  $x < 1$  then 0  
    else  $-1 + x$ .
```

Otro tipo de funciones definidas por algoritmos son las *funciones recursivas*. Estas funciones se caracterizan por que se definen haciendo referencia así mismas siendo necesario establecer algún valor de partida para no entrar en un bucle indefinido. Por ejemplo la función *factorial*. Esta función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros y que para cada n retorna el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ se puede escribir en la forma

$$f(n) = nf(n - 1); \quad f(0) = 1.$$

Algoritmicamente se define como sigue:

```
if  $n = 0$  then 1  
    else  $nf(n - 1)$ .
```

Así

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24.$$

Alternativamente el uso de la estructura *for*, que consiste en repetir una determinada operación tantas veces como indica un índice permite evaluar estas funciones. Así el factorial de 4 se obtiene mediante el siguiente algoritmo:

```
 $f(0) = 1$   
for  $n = 1$  to 4 do  $f(n) = nf(n - 1)$ .
```

1.2.3 Listas

La forma más simple de representar funciones es mediante *listas*. Una lista —o tupla— es una colección ordenada de objetos. El número de objetos determina su longitud. Las tuplas de longitud dos se llaman *pares*, las de longitud tres *ternas* y en general las de longitud n , *n-tuplas*.

Una función puede ser representada por una lista que incluya los valores de salida para una colección determinada de entradas. Las listas son adecuadas para representar sucesiones. Por ejemplo los seis primeros términos de la sucesión $f(n) = 2n$ pueden ser representados por la lista (2, 4, 6, 8, 10, 12). En dicha lista los objetos son las salidas relativas a las entradas 1, 2, 3, 4, 5, 6 respectivamente.

Dado que la longitud de una lista es siempre finita no es posible representar una sucesión en su totalidad. Lo más que se puede hacer es aumentar el tamaño de la lista para incluir los aspectos que se consideren suficientes para obtener una idea global de la sucesión.

1.2.4 Tablas

Dos listas de datos dispuestas en columnas —o en filas— constituyen una *tabla*. Una función puede ser representada mediante una tabla formada con una lista de entradas y con la lista de las salidas correspondientes. No toda tabla representa una función. Para que así lo fuera es necesario que la columna —o fila— correspondiente a los datos de entrada se halle libre de repeticiones.

Como las listas, las tablas solo permiten una representación fiel de funciones con dominio finito. Si el dominio no es finito la representación mediante tablas será siempre parcial. Por ejemplo, dada la función $f(x) = x^2$ se puede obtener una representación parcial de dicha función en el intervalo $[0, 2]$ escogiendo las entradas (0, 0.5, 1, 1.5, 2), construyendo la lista de las salidas correspondientes, (0, 0.25, 1, 1.75, 4) y disponiendo ambas listas de la forma siguiente:

| x | x^2 |
|-----|-------|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.25 |
| 1 | 1 |
| 1.5 | 1.75 |
| 2 | 4 |

1.2.5 Gráficas

Una representación mas completa de una función se puede obtener dibujando una *gráfica* en un sistema de coordenadas. En el caso de funciones reales de una variable real se utiliza un sistema de dos coordenadas. El eje x representa la variable independiente —o entradas— y el eje y la variable dependiente —o salidas—. El resultado será una curva en dicho sistema.

No todas las curvas representan una función. Para que así sea es necesario que satisfagan el *test de la vertical*: Una curva representa una función si cualquier línea paralela al eje y corta la gráfica a lo más en un punto. En este caso el dominio son los x 's en los que la vertical corta a la gráfica.

Para obtener la gráfica de una función en primer lugar se construye una tabla escogiendo un número significativo de entradas correspondientes a su dominio. A continuación se disponen los pares entrada-salida sobre un sistema de dos coordenadas y por último se unen los puntos de forma conveniente. La curva resultante es una representación gráfica de la función. Su fiabilidad depende del número de entradas elegido y del método seguido para unir los puntos resultantes.

2 Combinación de Funciones

Las funciones pueden combinarse entre sí para dar lugar a nuevas funciones bien sea mediante operaciones algebraicas o bien mediante composición.

2.1 Algebra de Funciones

Las funciones reales con el mismo dominio se pueden sumar, multiplicar y dividir siguiendo las reglas aritméticas usuales.

Definición 3 Sean f y g dos funciones reales con el mismo dominio $D \subset X$. Para cada $x \in D$ se definen la **suma**, la **diferencia** y el **producto** de f y g mediante las expresiones

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\(fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

De la misma forma para cada $x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$ se define el **cociente**

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Por ejemplo si $f(x) = 3 + x$ y $g(x) = 1 + x^2$ se tiene

$$(f + g)(x) = (3 + x) + (1 + x^2)$$

$$(f - g)(x) = (3 + x) - (1 + x^2)$$

$$(fg)(x) = (3 + x)(1 + x^2)$$

$$(f/g)(x) = (3 + x)/(1 + x^2)$$

2.2 Composición de Funciones

Supongamos que las salidas de una función f son usadas como entradas de una función g . Entonces podemos concatenar f y g para formar una nueva función cuyas entradas sean las entradas de f y las salidas los valores resultantes de aplicar primero el proceso f y a continuación el proceso g a la salida de f .

Definición 4 Sean X, Y y Z conjuntos. Sea f una función de $D(f) \subset X$ en Y y g una función de $D(g) \subset Y$ en Z . Supongamos que el recorrido de f está contenido en el dominio de g , es decir $R(f) \subset D(g)$. Se llama **composición** de f y g a la función h de $D(f) \subset X$ en Z que asigna a cada elemento $x \in D(f)$ el elemento de Z

$$h(x) = g(f(x))$$

escribiéndose $h = g \circ f$.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sin x$ la composición $h = g \circ f$ es

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1).$$

2.3 Funciones como Combinación de Funciones

El proceso de construcción de funciones mediante composición u operaciones algebraicas puede ser invertido para descomponer una función en una combinación de funciones más simples. Por ejemplo, la expresión

$$u(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^2}$$

puede ser descompuesta definiendo $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = \sqrt{x}$ resultando

$$u(x) = h(f(g(x)/f(x)))$$

es decir $u = h \circ f \circ (g/f)$.

2.4 Funciones Inversas

En general puede ocurrir que a dos entradas diferentes pertenecientes a su dominio les corresponda la misma salida. Por ejemplo la función $y = x^2$ hace corresponder a $x = -2$ y $x = +2$ el mismo valor $y = 4$. Una función que haga corresponder salidas diferentes a entradas diferentes se dice que es *uno-uno* o *inyectiva*.

Definición 5 Sean X e Y dos conjuntos y f una aplicación de X en Y . Se dice que f es uno-uno si y solo si elementos distintos en X poseen imágenes distintas en Y . Es decir si

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o lo que es equivalente

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Gráficamente es fácil distinguir las funciones uno-uno por la propiedad de que toda línea paralela al eje OX corta la gráfica a lo sumo en un punto. Esta condición se satisface evidentemente si la función es creciente y también si es decreciente. Por ejemplo, la función $y = x^3$ es siempre creciente y por consiguiente uno-uno.

Sea f una función uno-uno. Sea D su dominio y R su recorrido. Por la propia definición de recorrido para todo $y \in R$, existe un $x \in D$ tal que $y = f(x)$. Siendo f uno-uno dicho x ha de ser único. Por tanto es posible definir una función g de R en D mediante la relación $g(y) = x$. Por construcción es la única función que verifica

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \text{ para todo } x \in D \\ f(g(y)) &= y \text{ para todo } y \in R. \end{aligned}$$

Definición 6 Sean X e Y dos conjuntos y f una aplicación uno-uno de $D \subset X$ en Y con recorrido R . Se llama función inversa de f y se representa mediante el símbolo f^{-1} a la única aplicación de $R \subset Y$ en X que satisface las relaciones

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ para todo } x \in D \\ f(f^{-1}(y)) &= y \text{ para todo } y \in R. \end{aligned}$$

No debe confundirse $f^{-1}(y)$ con $1/f(y)$. Cuando queramos expresar esto último escribiremos $[f(y)]^{-1}$.

Supongamos $X = Y = \mathcal{R}$. Sea f una función uno-uno de $D \subset \mathcal{R}$ en \mathcal{R} con recorrido R y f^{-1} de $R \subset \mathcal{R}$ en \mathcal{R} su función inversa. Tratamos de establecer la relación entre la gráfica de f y la de su inversa.

Con objeto de representarlas sobre los mismos ejes denominaremos con la misma letra x la variable independiente de la f y de su inversa f^{-1} escribiendo

$$y = f(x) \text{ e } y = f^{-1}(x).$$

Dado un punto $(x, f(x))$, $x \in D$, en la gráfica de f el punto

$$(f(x), f^{-1}(f(x))) = (f(x), x)$$

ha de pertenecer a la gráfica de f^{-1} .

Recíprocamente, dado un punto $(x, f^{-1}(x))$, $x \in R$, en la gráfica de f^{-1} el punto

$$(f^{-1}(x), f(f^{-1}(x))) = (f^{-1}(x), x)$$

ha de pertenecer a la gráfica de f .

Por consiguiente, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$.

Ejemplo 7 Inversa de la función $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$.

Hemos mencionado que la función x^2 no es uno-uno cuando se considera como dominio toda la recta. En cambio, cuando restringimos su dominio al conjunto $[0, \infty)$ la función es siempre creciente y por tanto uno-uno. Para encontrar su inversa debemos resolver en x la ecuación

$$y = x^2, \quad x \in [0, \infty).$$

Siempre que $y \geq 0$ dicha ecuación posee una única solución

$$x = \sqrt{y}.$$

Por tanto el recorrido de la función

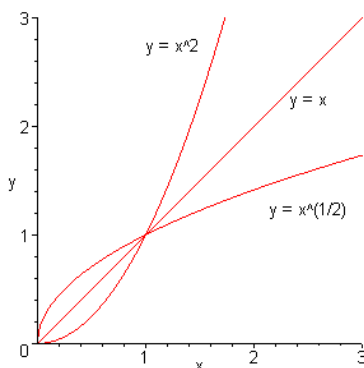
$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, \infty)$$

es el intervalo $[0, \infty)$ y su inversa

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, \infty).$$

Escribiendo x en vez de y como variable independiente de f^{-1} queda

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty).$$



■

3 Propiedades

3.1 Ceros

Definición 8 Sea f una función real con dominio D . Se dice que $a \in D$ es un *cero* (o *raíz*) de f si y sólo si $f(a) = 0$.

Una función puede tener un cero, como $f(x) = x - 1$; más de uno, como $f(x) = x^2 - x$; infinitos, como $\sin x$ o ninguno como $f(x) = 1/x$.

Si a es un cero de f el punto $(a, f(a)) = (a, 0)$ es un punto de la gráfica situado sobre el eje x . Por tanto, gráficamente los ceros de una función son los puntos de intersección de su gráfica con el eje x .

Esto permite estimar el valor de los mismos una vez que se dispone de la representación gráfica de la función. Para ello mediante inspección se aísla un cero escogiendo un intervalo que solo contenga a dicho cero y ningún otro. A continuación se representa la función en dicho intervalo obteniéndose una representación magnificada alrededor del cero elegido. Se repite el proceso escogiendo cada vez intervalos más pequeños hasta localizar el cero con la precisión deseada.

Analíticamente los ceros de una función son las soluciones de la ecuación

$$f(x) = 0, \quad x \in D.$$

Encontrar las soluciones de una ecuación en general es complicado y solo se conoce su solución analítica en algunos casos. Por ejemplo, si se trata de una ecuación lineal

$$ax + b = 0$$

la solución es

$$x = -b/a.$$

En el caso de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

las soluciones vienen expresadas por las fórmulas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número de soluciones depende del signo del discriminante

| | |
|----------------------|-----------------------|
| si $b^2 - 4ac > 0$, | dos raíces distintas |
| si $b^2 - 4ac = 0$, | una sola raíz doble . |
| si $b^2 - 4ac < 0$, | ninguna raíz real. |

Existen también fórmulas, aunque complicadas, para ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado por lo que al menos teóricamente es posible obtener una solución exacta para cualquier ecuación polinómica de grado menor o igual que cuatro.

Sin embargo es conocido que no existen fórmulas generales para ecuaciones de grado mayor o igual que cinco. No obstante, muchos de estos casos se pueden resolver reduciéndolos mediante factorización y/o descomposición a casos de grado menor o igual que cuatro. Lo mismo ocurre para algunas funciones algebraicas en general. El problema se complica aún más cuando las ecuaciones incluyen funciones trascendentes.

En todos los casos que no sea posible obtener los ceros mediante expresiones exactas se usan métodos aproximados. Todos estos métodos requieren que se aisle en primer lugar el cero como se ha indicado antes.

Estos métodos pueden ser también utilizados para buscar otros valores distintos de cero. Así para encontrar los x 's para los que f toma el valor b es necesario resolver la ecuación

$$f(x) = b$$

lo que es equivalente a resolver la ecuación

$$g(x) = f(x) - b = 0.$$

3.2 Paridad e Imparidad. Simetrías.

Existen funciones que al cambiar x por $-x$ no cambian de valor mientras que otras alcanzan el mismo valor pero cambiado de signo.

Definición 9 Sea f una función de una variable real. Se dice que

1. f es **par** si y sólo si $f(-x) = f(x)$
2. f es **impar** si y sólo si $f(-x) = -f(x)$

La paridad (resp. imparidad) de una función se puede estudiar analíticamente comprobando si la función $f(x) - f(-x)$ (resp. $f(x) + f(-x)$) es nula para todos los valores de x .

Si f es par su gráfica pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(-a, f(a))$, lo que significa que es simétrica respecto del eje OY . En cambio si es impar su gráfica pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(-a, -f(a))$, lo que quiere decir que es simétrica respecto del origen de coordenadas. Por ello para estudiar estas funciones solo es necesario hacerlo en la parte positiva de su dominio y completarlas por simetría.

Ejemplo de función par es $f(x) = x^2$ y de función impar $f(x) = x^3$. Así mismo existen funciones que no son pares ni impares como $f(x) = x + 1$. Por el contrario no puede existir ninguna función cuya gráfica sea simétrica respecto del eje OX excepto la función idénticamente nula, ¿por qué?

3.3 Máximos y Mínimos

En muchos problemas interesa conocer puntos en los cuales los valores de la función sean superiores (o inferiores) a cualquier otro valor. Estos problemas se conocen genéricamente como problemas de optimización.

Definición 10 Sea f una función real de dominio D .

1. Se dice que $a \in D$ es un **punto de máximo** de f si y sólo si para cada $x \in D$ se verifica $f(x) \leq f(a)$. El valor $f(a)$ se llama **valor máximo** de f .
2. Se dice que $a \in D$ es un **punto de mínimo** de f si y sólo si para cada $x \in D$ se verifica $f(a) \leq f(x)$. El valor $f(a)$ se llama **valor mínimo** de f .
3. Se dice que $a \in D$ es un **punto de máximo relativo o local** de f si y sólo si existe un intervalo abierto A tal que $a \in A \subset D$ y para cada $x \in A$ se verifica $f(x) \leq f(a)$. El valor $f(a)$ se llama **valor máximo relativo o local** de f .
4. Se dice que $a \in D$ es un **punto de mínimo relativo o local** de f si y sólo si existe un intervalo abierto A tal que $a \in A \subset D$ y para cada $x \in A$ se verifica $f(a) \leq f(x)$. El valor $f(a)$ se llama **valor mínimo relativo o local** de f .

Evidentemente el valor máximo de f es el mayor de los valores máximos relativos. Para un mayor énfasis el valor máximo se denomina también *valor máximo absoluto* y los puntos de máximo, *puntos de máximo absoluto*. Análogas consideraciones se establecen para los valores de mínimo y los puntos de mínimo. Por último los puntos de máximo o mínimo, absolutos o relativos, se conocen indistintamente como *puntos extremos* o simplemente *extremos*.

Como con los ceros los extremos pueden ser obtenidos aproximadamente a partir de la representación gráfica de f . La aproximación puede ser mejorada

mediante representaciones en regiones más pequeñas alrededor del extremo. Salvo en casos triviales o felices la obtención de los extremos mediante métodos directos es difícil. El cálculo diferencial permitirá reducir el problema a calcular los ceros de una función relacionada con f .

3.4 Cotas. Supremo e Infimo

En muchas ocasiones interesa conocer si los valores de una función en una región del dominio se mantienen por debajo de un determinado valor y/o por encima de otro.

Definición 11 Sea f una función real de dominio D y $A \subset D$. Se dice que:

1. f está **acotada superiormente** en A si y sólo si existe un número S tal que $f(x) \leq S$ para todo $x \in A$. En este caso S se llama cota superior de f en A .
2. f está **acotada inferiormente** en A si y sólo si existe un número s tal que $f(x) \geq s$ para todo $x \in A$. En este caso s se llama cota inferior de f en A .
3. f está **acotada** en A si y sólo si f está acotada superior e inferiormente en A , o lo que es equivalente si existe un número positivo B tal que $|f(x)| \leq B$ para todo $x \in A$. En este caso B se llama simplemente cota de f en A .

Las cotas superiores e inferiores son fácilmente reconocidas sobre la gráfica de la función. También se pueden determinar analíticamente utilizando desigualdades conocidas.

Definición 12 Sea f una función real con dominio D .

1. Se llama **supremo** de f y se escribe $\sup(f)$ al número real S tal que:
 - (a) S es cota superior de f en D ; y
 - (b) para toda cota superior S' de f en X se cumple que $S \leq S'$.
2. Se llama **ínfimo** de f y se escribe $\inf(f)$ al número real s tal que:
 - (a) s es cota inferior de f en D ; y

(b) para toda cota inferior s' de f en D se cumple que $s' \leq s$.

También se puede decir que el supremo es la menor de las cotas superiores y el ínfimo la mayor de las cotas inferiores. Si f no está acotada superiormente se escribe $\sup(f) = +\infty$. Si f no está acotada inferiormente se escribe $\inf(f) = -\infty$.

3.5 Crecimiento y Decrecimiento. Monotonía

Una función se dice que es creciente si a mayores valores de x corresponden mayores valores de $f(x)$ mientras que se dice que es decreciente si a mayores valores de x corresponden menores valores de $f(x)$. Formalmente se establece la siguiente definición.

Definición 13 Sea f una función real con dominio real D y $A \subset D$.

1. Se dice que f es **creciente** en A si y sólo si para cada $a, b \in A$ tales que $a < b$ se verifica $f(a) < f(b)$.
2. Se dice que f es **decreciente** en A si y sólo si para cada $a, b \in A$ tales que $a < b$ se verifica $f(a) > f(b)$.
3. Se dice que f es **monótona** en A si y sólo si se cumple una de las dos propiedades anteriores en A .

Las regiones en que una función es monótona se distinguen claramente en su representación gráfica. El cálculo diferencial permitirá relacionar éstas regiones con regiones de positividad y negatividad de otra función.

3.6 Concavidad y Convexidad

Una función puede crecer (o decrecer) de dos formas diferentes según que dados dos puntos de la gráfica todo punto intermedio de la misma se sitúe siempre por debajo o siempre por encima del segmento que los une.

Definición 14 Sea f una función real con dominio real D .

1. Se dice que f es **convexa** si y sólo si para cada $a, b \in D$ tales que $a < b$ y $0 < t < 1$ se verifica

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

2. Se dice que f es **cóncava** si y sólo si para cada $a, b \in D$ tales que $a < b$ y $0 < t < 1$ se verifica

$$f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + tf(b).$$

4 Funciones Elementales

Mediante expresiones se pueden definir una clase de funciones básicas en la matemática conocidas como *funciones elementales*. A continuación examinaremos los diferentes tipos de estas funciones según la naturaleza de la expresión que las define.

4.1 Funciones Polinómicas

Sea n un número entero positivo y $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales fijos con $a_n \neq 0$. Un *polinomio* es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman *coeficientes* y n el *grado* del polinomio. Los valores de x para los que el polinomio toma el valor cero se llaman *raíces o ceros*.

Las funciones definidas mediante un polinomio se denominan *funciones polinómicas* y su dominio es todo \mathcal{R} . En particular, en el caso $n = 0$, se trata de una función *constante*,

$$f(x) = a$$

y su gráfica es una línea recta horizontal.

En el caso $n = 1$ se trata de una función *lineal*,

$$f(x) = a + bx$$

y su gráfica es una línea recta no vertical.

Para $n = 2$ se trata de una función *cuadrática*,

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Su gráfica es una parábola cuyo eje principal es paralelo al eje OY .

4.2 Funciones Racionales

Las funciones que se pueden expresar como cociente de dos polinomios reciben el nombre de *funciones racionales*. En general, son de la forma

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

y su dominio es todo \mathcal{R} excepto las raíces reales del denominador.

Las funciones racionales se clasifican en *propias*, *estrictamente propias* o *impropias* según que el grado del numerador sea menor o igual, estrictamente menor o mayor, respectivamente, que el del denominador. Mediante división del numerador por el denominador toda función racional impropia —resp. propia— se puede reducir a un polinomio —resp. una constante— más una función racional estrictamente propia.

La función racional más sencilla es la función

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Su dominio son todos los números reales excepto $x = 0$ y su gráfica una hipérbola equilátera.

4.3 Funciones Algebraicas

Las *funciones algebraicas* son aquellas que están definidas mediante expresiones formadas por x , constantes y los operadores aritméticos sumar, restar, multiplicar y dividir junto con las potencias de exponente entero o racional.

Las funciones algebraicas incluyen como caso particular a las funciones polinómicas y a las racionales pero las distingue la posible presencia de radicales. Por ejemplo, la función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$

o una función más complicada como

$$f(x) = \sqrt{2x - x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

4.4 Funciones Transcendentes

Las funciones definidas mediante una expresión que no sean algebraicas reciben el nombre de *transcendentes*. Son funciones transcendentales las funciones trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas.

4.5 Funciones Trigonómicas

En geometría elemental se definen el seno, el coseno, la tangente,....de un ángulo. En base a estas nociones se definen las funciones trigonométricas.

4.5.1 Radianes

Tanto en geometría elemental, como en astronomía o en navegación los ángulos se miden en grados. En cambio en cálculo se prefiere utilizar una unidad diferente, el *radián*.

En la circunferencia unidad la medida en radianes del ángulo comprendido entre dos radios coincide salvo el signo con la longitud del arco de circunferencia subtendido. Se asocia signo positivo cuando el ángulo se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo cuando se recorre a favor. Puesto que a una revolución completa en la circunferencia se asocian 360° se tiene la equivalencia

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ.$$

De esta forma a un ángulo α medido en grados le corresponden

$$x = \frac{2\pi}{360} \alpha \text{ radianes}$$

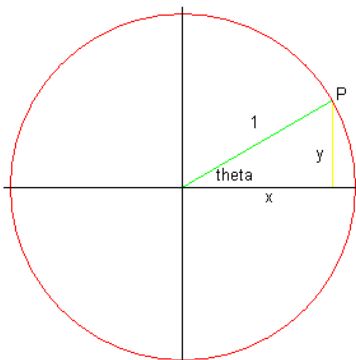
y recíprocamente a un ángulo x medido en radianes le corresponden

$$\alpha = \frac{360}{2\pi} x^\circ.$$

4.5.2 Funciones Seno y Coseno

Para definir las funciones trigonométricas seno y coseno tomamos la circunferencia unidad y suponemos ésta centrada en el origen de coordenadas O . Dado un número real cualquiera $\theta \geq 0$ localizamos un punto $P(\theta)$ sobre la circunferencia rotando en sentido contrario a las agujas del reloj el radio que

une el origen O con el punto $(1, 0)$ hasta recorrer un ángulo igual a θ radianes. El punto $P(\theta)$ es el extremo situado sobre la circunferencia del radio en su nueva posición. Si $\theta < 0$ la rotación se efectúa a favor de las agujas del reloj hasta recorrer un ángulo igual a $|\theta|$ radianes.



Sean (x, y) las coordenadas del punto $P(\theta)$, se definen la función *seno* y la función *coseno* mediante las relaciones

$$\begin{aligned}\sin \theta &= y \\ \cos \theta &= x.\end{aligned}$$

Las dos funciones están definidas para todo número real θ , su dominio es toda la recta real.

4.5.3 Otras Funciones Trigonómicas

El resto de las funciones trigonométricas se definen en base a estas dos

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, & x \neq 0 \\ \cot \theta &= \frac{x}{y} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & y \neq 0 \\ \sec \theta &= \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \theta}, & x \neq 0 \\ \csc \theta &= \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \theta}, & y \neq 0.\end{aligned}$$

Estas funciones no están definidas para todo número real. La tangente y la secante están definidas en todos los puntos excepto donde se anula $\cos \theta$, por

tanto su dominio es $\mathcal{R} - \{(2k + 1)\pi/2, k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. La cotangente y la cosecante en todos los puntos excepto donde se anula $\sin \theta$, por tanto su dominio es $\mathcal{R} - \{k\pi, k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

4.5.4 Periodicidad

Una propiedad importante de las funciones trigonométricas es su caracter periódico.

Se dice que una función $f(x)$ es *periódica* de período p sí y solo sí $p \neq 0$ y $f(x + p) = f(x)$ siempre que x y $x + p$ estén en el dominio de f . El menor número positivo p que cumpla la propiedad anterior se llama *período fundamental*.

Por la propia construcción de las funciones seno y coseno es claro que son periódicas con período 2π . En consecuencia también lo son las funciones secante y cosecante. Es fácil comprobar que las funciones tangente y cotangente son a su vez periódicas pero de período fundamental π .

4.5.5 Identidades Trigonométricas

Suponemos conocidas las propiedades e identidades más importantes que resumimos a continuación

1. *Paridad-Imparidad (Fórmulas de los signos)*

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta, \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Por tanto el seno es una función impar, su gráfica es simétrica respecto del origen. Por el contrario la función coseno es par y su gráfica es simétrica respecto el eje OY .

2. *Identidades circulares*

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1, \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta, \\ \cot^2 \theta + 1 &= \csc^2 \theta.\end{aligned}$$

3. *Ley de los cosenos* Sean a, b y c los lados de un triángulo cualquiera y γ el ángulo opuesto al lado c . Entonces,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

4. *Fórmulas de la suma y la diferencia*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

5. *Fórmulas del ángulo doble*

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

6. *Fórmulas del ángulo mitad*

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2}, \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2}.\end{aligned}$$

7. *Fórmulas producto*

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].\end{aligned}$$

8. *Fórmulas de la Tangente*

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.\end{aligned}$$

Aparte de las leyes de los senos y cosenos, fáciles de recordar nemotécnicamente, solo es necesario memorizar las fórmulas de los signos, la primera de las identidades circulares y las dos primeras fórmulas de las sumas. El resto se deducen fácilmente a partir de ellas.

4.6 Funciones Trigonométricas Inversas

Ninguna de las seis funciones trigonométricas es uno-uno y por tanto no poseen inversas. No obstante restringiendo el dominio de cada una de ellas a un subconjunto en el cual sean monótonas podremos definir la correspondiente función inversa.

4.6.1 Función Seno Inversa

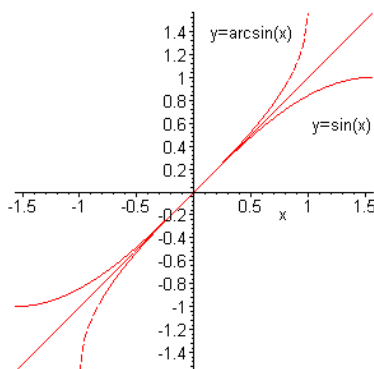
La función seno oscila entre -1 y 1 con período 2π . Por tanto cualquier línea paralela al eje OX comprendida entre dichos valores corta a la gráfica en infinitos puntos. La función seno no es uno-uno y por tanto no tiene inversa. En cambio si la restringimos al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ la función es siempre creciente desde -1 a 1 . Por consiguiente, la función

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

es uno-uno y posee función inversa. Su función inversa se denomina *función seno inversa* o *arco-seno*

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

La gráfica de ambas funciones es



4.6.2 Función Coseno Inversa

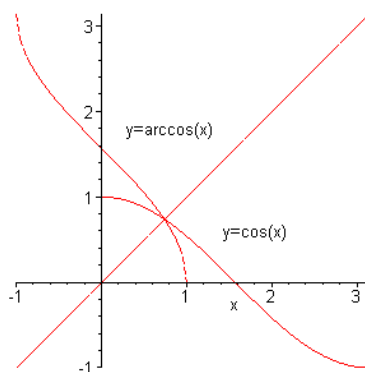
Por la misma razón que la función seno la función seno tampoco es uno-uno y por tanto tampoco tiene inversa. En cambio si la restringimos al intervalo $[0, \pi]$ la función es siempre decreciente de 1 a -1 . Por consiguiente, la función

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

es uno-uno y posee función inversa. Su función inversa se denomina *función coseno inversa* o *arco-coseno*

$$y = \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

La gráfica de ambas funciones es



4.6.3 Función Tangente Inversa

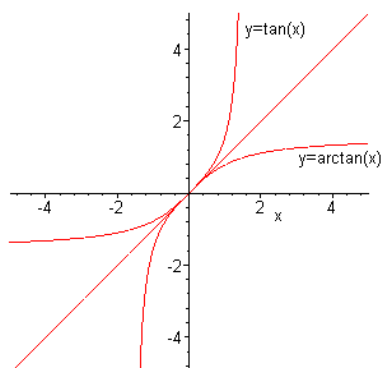
La definición de la inversa de la tangente sigue el mismo procedimiento que para la función seno o coseno. Ahora la restringimos al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. En dicho intervalo la función tangente es siempre creciente desde $-\infty$ a $+\infty$. Por consiguiente, la función

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

es uno-uno y posee función inversa. Su función inversa se denomina *función tangente inversa* o *arco-tangente*

$$y = \arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

La gráfica de ambas funciones es



4.6.4 Otras Trigonómicas Inversas

Las otras tres funciones trigonométricas inversas se definen de forma análoga:

Función cotangente inversa

$$y = \cot^{-1} x, \quad -\infty < x < \infty,$$

es la inversa de

$$y = \cot x, \quad 0 < x < \pi.$$

Función secante inversa

$$y = \sec^{-1} x, \quad |x| \geq 1,$$

es la inversa de

$$y = \sec x, \quad 0 < x < \pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}.$$

Función cosecante inversa

$$y = \csc^{-1} x, \quad |x| \geq 1,$$

es la inversa de

$$y = \csc x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0.$$

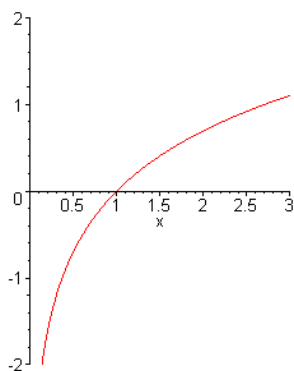
4.7 Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Existen diferentes métodos construir las funciones exponenciales y logarítmicas. Uno de estos métodos se basa en la noción de integral y en la posibilidad de definir funciones mediante integrales. En el tema de integración utilizaremos dicho método para construir formalmente la función logaritmo y demostrar sus propiedades. Después definiremos la exponencial como su inversa. De momento suponemos que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de dichas funciones que recopilamos a continuación.

4.7.1 Función Logaritmo

$$y = \ln x, \quad \text{dominio} = (0, \infty), \quad \text{recorrido} = (-\infty, \infty).$$

Gráfica del logaritmo



Proposición 15 (Propiedades elementales de los logaritmos) *Para todo $a, b > 0$ se verifica*

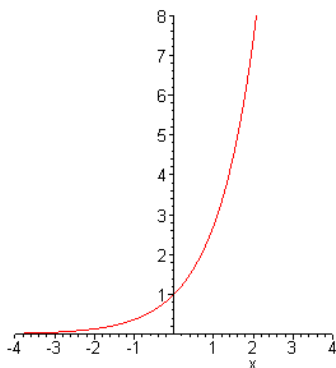
1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
4. $\ln 1 = 0$.

4.7.2 Función exponencial

El número e es el único número real que satisface la ecuación $\ln x = 1$. La *exponencial* es la inversa de la función logaritmo

$$y = e^x, \quad \text{dominio} = (-\infty, \infty), \quad \text{recorrido} = (0, \infty).$$

Gráfica de la exponencial



Proposición 16 (Propiedades elementales de la exponencial) *Para todo a, b se verifica*

1. $e^{a+b} = e^a e^b$,
2. $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$,
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$,
4. $(e^a)^b = e^{ab}$,
5. $e^0 = 1$.

4.7.3 Exponenciales y Logaritmos de base cualquiera

Sea $a > 0$. Se define la función *exponencial de base a* mediante

$$y = a^x = e^{x \ln a}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

excepto para $a = 1$ dicha función es monótona creciente por lo que posee inversa. Su inversa es el logaritmo en base a

$$y = \log_a x \quad \text{sí y solo sí} \quad a^y = x.$$

4.7.4 Potencias de Exponente Real

Las potencias de exponente entero n y base real x real se definen mediante

$$x^n = \overbrace{x \cdots x}^{n\text{-veces}}.$$

Las potencias de exponente racional m/n y base real se definen mediante

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Es obvio que para $x > 0$ se verifica

$$x = e^{\ln x}$$

y por tanto

$$x^{m/n} = (e^{\ln x})^{m/n} = e^{(m/n) \ln x}.$$

Esto sugiere definir las *potencias de exponente real* r por

$$x^r = e^{r \ln x}, \quad x > 0.$$

Es fácil comprobar la validez de las leyes usuales de las potencias en el caso de exponente real arbitrario.

Proposición 17 (Propiedades de las potencias de exponente real) 1.

$$x^{r+s} = x^r x^s,$$

$$2. \quad x^{r-s} = \frac{x^r}{x^s},$$

$$3. \quad (x^r)^s = x^{rs}.$$

4.8 Funciones Hiperbólicas

La función exponencial puede descomponerse en dos componentes de la siguiente forma

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La primera componente es una función par y la segunda impar y constituyen la base de las *funciones hiperbólicas*. Estas funciones tienen una gran importancia práctica, por ejemplo describen la forma de los cables del tendido eléctrico o las ondas vibratorias en sólidos elásticos.

4.8.1 Seno y Coseno Hiperbólicos

Se denominan *seno* y *coseno hiperbólico* respectivamente a las funciones

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

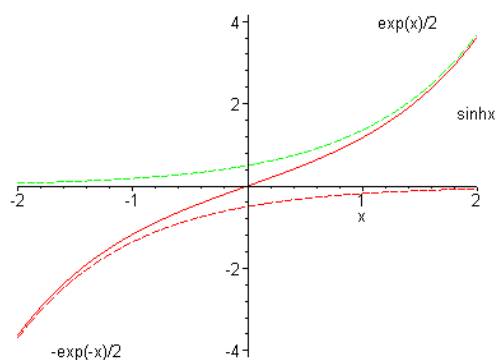
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ambas funciones están definidas para todo x real y satisfacen

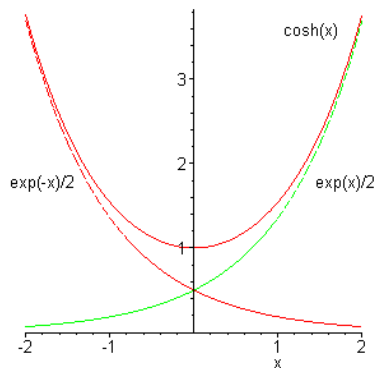
$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x.$$

El seno hiperbólico es una función impar, su recorrido es toda la recta y su gráfica es



El coseno hiperbólico es una función par, su recorrido es el intervalo $[0, \infty)$ y su gráfica es



Valores típicos de las funciones seno y coseno hiperbólico son

$$\sinh 0 = 0; \quad \cosh 0 = 1.$$

4.8.2 Otras Funciones Hiperbólicas

El resto de las funciones hiperbólicas se definen como combinación de las anteriores

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && (\text{tangente hiperbólica}) \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} && (\text{cotangente hiperbólica}) \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} && (\text{secante hiperbólica}) \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} && (\text{cosecante hiperbólica}). \end{aligned}$$

4.8.3 Identidades Hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas satisfacen una serie de identidades similares a las fórmulas trigonométricas salvo en los signos. Estas son,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2} \\ \cosh^2 x &= \frac{\cosh 2x + 1}{2} \end{aligned}$$

Las tres primeras identidades se comprueban substituyendo las fórmulas de definición del seno y coseno hiperbólico. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Las fórmulas cuarta y quinta son casos particulares de la segunda y tercera respectivamente. Las dos últimas se obtienen combinando la primera y la tercera.

Obsérvese que como consecuencia de la primera identidad podemos afirmar que el punto $(\cosh t, \sinh t)$ está situado sobre la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Esto contrasta con las funciones trigonométricas para las que el punto $(\cos t, \sin t)$ está situado sobre la circunferencia unidad

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Esto explica geoméricamente porqué las funciones trigonométricas son periódicas y las hiperbólicas no lo son.

4.8.4 Funciones Hiperbólicas Inversas

La función seno hiperbólico es uno-uno y por tanto posee inversa. Lo mismo ocurre con la tangente hiperbólica. No así con el coseno hiperbólico el cual debe ser restringido a una parte de su dominio para definir su inversa. Así definimos,

$$\begin{aligned}y &= \sinh^{-1} x, & -\infty < x < \infty \\ y &= \cosh^{-1} x, & 1 \leq x < \infty \\ y &= \tanh^{-1} x, & -1 < x < 1\end{aligned}$$

como las inversas de

$$\begin{aligned}y &= \sinh x, & -\infty < x < \infty \\ y &= \cosh x, & 0 \leq x < \infty \\ y &= \tanh x, & -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

respectivamente.

De forma similar es posible definir inversa del resto de las funciones hiperbólicas pero son de un uso menor y las omitimos.

Las funciones hiperbólicas inversa pueden ser expresadas como logaritmos verificándose las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & -\infty < x < \infty, \\ \cosh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & 1 \leq x < \infty, \\ \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, & -1 < x < 1.\end{aligned}$$

Solo probaremos la primera, las otras se dejan como ejercicio. Por la definición de la inversa se tiene que

$$y = \sinh^{-1} x$$

implica

$$\sinh y = x$$

y por consiguiente,

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x.$$

De aquí se sigue

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

y multiplicando ambos lados por e^y resulta

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Substituyendo, $t = e^y$ se obtiene una ecuación cuadrática en t

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

De las dos soluciones anteriores deseamos la correspondiente al signo menos ya que $t = e^y > 0$. Por tanto,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

y tomando logaritmos resulta la relación

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$