CALCULO 11-M

Parcial Febrero 99

Duración 2h 30m

1 Enunciados

1. (**4 puntos**)

   (a) Resolver la desigualdad
   $$\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-6}>0.$$

   (b) Probar que la función $f(x)=x^3-3x^2+6x+12$ tiene exactamente una raíz negativa.

   (c) Obtener $F'(1)$ siendo $f(t)$ continua y
   $$F(x)=\int_0^{1+x^2} tf(t)\,dt.$$

   (d) Calcular el valor medio de la función $f(x)=|x^3-1|$ en el intervalo $[0,3]$.

2. (**2 puntos**) Sea
   $$f(x)=\frac{(x-1)\,|x-2|}{x^3-3x^2+2x}e^{1/x}$$
   y D su domino. Estudiar la continuidad de la función
   $$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in D\\ 1 & \text{si } x\notin D.\end{cases}$$

3. (**2 puntos**) Analizar la gráfica de la función
   $$y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

4. (**2 puntos**) Sea D la región del plano limitada por las parábolas $y=x^2$ e $y=1+x-x^2$. Calcular:

   (a) El área encerrada por la región D.

   (b) El volumen del sólido engendrado al girar la región D alrededor de la recta $y=-1$.

2 Soluciones

1. **(4 puntos)**

   (a) Reduciendo a común denominador la desigualdad

   $$\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-6}>0$$

   resulta

   $$\frac{5x-10}{(x-1)(x-6)}>0.$$

   La solución de esta desigualdad es equivalente a la de

   $$(x-1)(x-2)(x-6)>0.$$

   El signo de los factores es $---$ para $x<1$, $+--$ para $1<x<2$, $++-$ para $2<x<6$, y $+++$ para $x>6$. En consecuencia, la solución es

   $$(1,2)\cup(6,+\infty).$$

   (b) La función

   $$f(x)=x^3-3x^2+6x+12$$

   es continua. Además,

   $$f(-2)=-20<0 \text{ y } f(0)=12>0.$$

   Por la propiedad de los valores intermedios existe al menos un cero r de f en el intervalo $(-2,0)$ y en consecuencia al menos una raíz negativa. Si existiera otro cero s de f distinto del propio r por el Teorema de Rolle la derivada de f debería anularse en algún punto comprendido entre r y s. Esto no es posible ya que

   $$f'(x)=3x^2-6x+6.$$

   no admite raíces reales al ser su discriminante $b^2-4ac=-36<0$. En consecuencia, solo existe una raíz real que además es negativa.

(c) Tomando $v(x) = 1 + x^2$ podemos escribir

$$F(x) = G(v(x))$$

siendo

$$G(v) = \int_0^v tf(t)\,dt.$$

Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de la Cadena se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dv}\left(\int_0^v tf(t)\,dt\right)\frac{dv}{dx} \\ &= vf(v)\frac{dv}{dx} \\ &= (1+x^2)f(1+x^2)(2x). \end{aligned}$$

Haciendo $x = 1$ resulta

$$F'(1) = 4f(2).$$

(d) El valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ viene dado por la fórmula

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Aplicando a la función $f(x) = |x^3 - 1|$ en el intervalo $[0, 3]$ resulta

$$f_m = \frac{1}{3}\int_0^3 \left|x^3 - 1\right|\, dt.$$

Puesto que $x^3 - 1 \leq 0$ en el intervalo $[0, 1]$ y $x^3 - 1 \geq 0$ en el intervalo $[1, 3]$ se tiene

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1 - x^3\right)\, dt + \frac{1}{3}\int_1^3 \left(x^3 - 1\right)\, dt \\ &= \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4} - x\right]_1^3 \\ &= \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

2. (**2 puntos**) Factorizando el denominador, la expresión

$$f(x) = \frac{(x-1)\,|x-2|}{x^3 - 3x^2 + 2x} e^{1/x}$$

se convierte en

$$f(x) = \frac{(x-1)\,|x-2|}{x(x-1)(x-2)} e^{1/x}.$$

El dominio D de f es toda la recta real excepto los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. La función

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 1 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

es continua en todos los puntos pertenecientes a D. Estudiemos la continuidad en cada uno de los otros tres puntos por separado.

(a) Punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\,|x-2|}{x(x-1)(x-2)} e^{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x-2|}{(x-2)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{x} \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{x}. \end{aligned}$$

Por la derecha se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x} = -\infty.$$

Por la izquierda

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} g(x) &= -\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} \\ &= -\lim_{t\to -\infty} te^t \\ &= -\lim_{t\to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \\ &= \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{e^{-t}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que el límite no existe y g posee una discontinuidad esencial en $x = 0$.

(b) Punto $x = 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,|x-2|}{x(x-1)(x-2)} e^{1/x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{|x-2|}{x(x-2)} e^{1/x} \\
&= -e.
\end{aligned}$$

Como $g(0) = 1 \neq -e$, existe una discontinuidad evitable.

(c) Punto $x = 2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\,|x-2|}{x(x-1)(x-2)} e^{1/x} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \lim_{x\to 2} \frac{e^{1/x}}{x} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{e} \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}.
\end{aligned}$$

Por la derecha, $x > 2$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{e} \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{(x-2)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{e} \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Por la izquierda, $x < 2$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} g(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{e} \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{(x-2)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{e} \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Por tanto, g posee discontinuidad de salto en $x = 2$.

3. (**2 puntos**)

(a) *Dominio* El dominio de la función $y = \arcsin u$ es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto el dominio de la función

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

estará formado por todos los x's tales que

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

La desigualdad

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

equivale a

$$2x \leq 1 + x^2$$

o

$$0 \leq 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2$$

lo que se cumple para todo x. De la misma forma la otra desigualdad

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2}$$

también se cumple para todo x por lo que el dominio de la función pedida será todo la recta real.

(b) *Simetría* La función y es simétrica respecto del origen ya que

$$\arcsin \frac{2(-x)}{1+x^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

(c) *Cortes con los ejes* El corte con el eje OY es el punto $x = 0$, $y = y(0) = 0$. Los cortes con el eje OX son las soluciones de la ecuación

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

El único valor de $u \in [-1, 1]$ tal que $\arcsin u = 0$ es $u = 0$. Como

$$\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

implica $x = 0$, el origen es el único corte con el eje OX.

(d) *Discontinuidades* La función es continua por ser composición de funciones continuas

$$y = \arcsin u; \qquad u = \frac{2x}{1+x^2}.$$

(e) *Asíntotas* La función no posee ninguna asíntota vertical al ser continua y estar definida en todos los puntos. Por otra parte

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0$$

por lo que el eje OX es una asíntota horizontal.

(f) *Derivabilidad* La función $y = \arcsin u$ es derivable en $(-1, 1)$ y su derivada es

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2}{(1+x^2)} \frac{(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}}.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$y' = \frac{2}{(1+x^2)} \text{ si } x^2 < 1$$

e

$$y' = \frac{-2}{(1+x^2)} \text{ si } x^2 > 1$$

Observamos que las derivadas laterales en $x = 1$ son $y'(0^-) = 2$, $y'(0^+) = -2$ por lo que en dicho punto la función no es derivable presentando un pico. En $x = -1$ las derivadas laterales son $y'(0^-) = -2$, $y'(0^+) = 2$ por lo que en dicho punto la función tampoco es derivable y también presentan un pico.

(g) *Crecimiento y Decrecimiento* Como $y'(x) > 0$ si $x^2 < 1$ e $y'(x) > 0$ si $x^2 < 1$ la gráfica es creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y decreciente fuera de él.

(h) *Máximos y mínimos* Teniendo en cuenta que la gráfica crece para $0 \leq x < 1$, que decrece para $x > 1$ y que es es continua en $x = 1$ podemos afirmar que dicha función posee un máximo de valor $y(1) = \pi/2$ en dicho punto. Análogamente, existe un mínimo en $x = -1$ de valor $y(-1) = -\pi/2$. Como los límites en el infinito son 0 podemos afirmar que son máximo y mínimo absolutos.

(i) *Concavidad y convexidad* La derivada segunda es

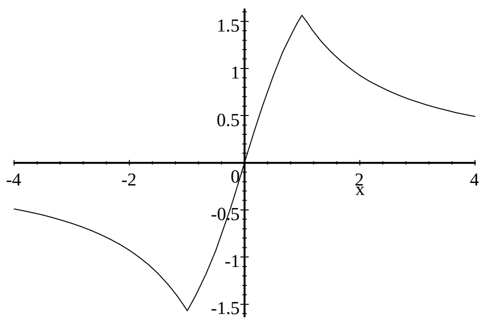
$$y'' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \text{ si } x^2 < 1$$

e

$$y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \text{ si } x^2 > 1$$

por lo que la gráfica es cóncava hacia arriba o convexa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en la región $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

(j) *Gráfica*



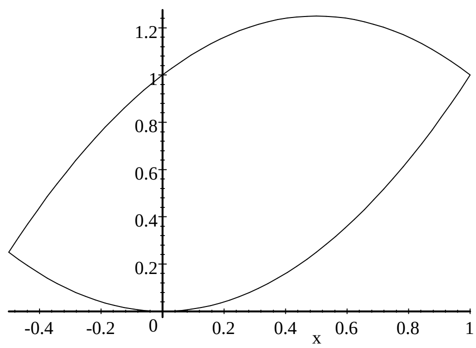
4. (**2 puntos**) Las parábolas

$$y_1 = x^2 \text{ e } y_2 = 1 + x - x^2$$

se cortan en los puntos cuyas abcisas son las soluciones de la ecuación

$$x^2 = 1 + x - x^2$$

es decir en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$.



Región D

(a) Area de la región D

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/2}^{1} [y_2 - y_1]\, dx \\ &= \int_{-1/2}^{1} [1 + x - x^2 - x^2]\, dx \\ &= \int_{-1/2}^{1} [1 + x - 2x^2]\, dx \\ &= \left[x + \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1/2}^{1} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

(b) Volumen engendrado al girar alrededor del eje $y = -1$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1/2}^{1} [(y_2+1)^2 - (y_1+1)^2]\, dx \\
&= \pi \int_{-1/2}^{1} [-2x^3 - 5x^2 + 4x + 3]\, dx \\
&= \pi \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-1/2}^{1} \\
&= \frac{117}{32}\pi.
\end{aligned}
$$