

# CALCULO 11-M

## Examen Parcial Febrero 98

**Ejercicio 1** Encontrar valores de  $a$  y  $b$  tales que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0.$$

**Solución:**

Sea

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b).$$

Si  $a \geq 0$  el límite  $L$  es infinito independientemente del valor de  $b$ . Por tanto supondremos  $a < 0$ . En este caso el límite es de la forma  $\infty - \infty$ . Racionalizando resulta

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - a^2)x^2 - (2ab + 1)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}. \end{aligned}$$

Observamos que si  $1 - a^2 \neq 0$  el grado del numerador es mayor que el del denominador y el límite es infinito. Para  $a = -1$  se tiene

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(-2b + 1)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + b}.$$

Dicho límite es de la forma  $\infty/\infty$ . Dividiendo numerador y denominador

por  $x$  y teniendo en cuenta que para valores negativos de  $x$  se verifica  $x = -\sqrt{x^2}$  resulta

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(-2b+1) + \frac{(1-b^2)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - 1 + \frac{b}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(-2b+1) + \frac{(1-b^2)}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{b}{x}} \\ &= \frac{1-2b}{2}. \end{aligned}$$

La condición  $L = 0$  implica  $b = 1/2$  resultando

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0$$

sí y solo sí

$$a = -1 \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2}.$$

**Ejercicio 2** Obtener  $f''(0)$  siendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

**Solución:**

Para todo  $x \neq 0$  la función  $f$  es diferenciable y se verifica

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}.$$

Para  $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h-1}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2}. \end{aligned}$$

El último límite es de la forma  $0/0$ . Aplicando L'Hôpital dos veces resulta

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

La derivada segunda en cero es

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h-1)e^h + 1}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-1)e^h + 1 - \frac{1}{2}h^2}{h^3}. \end{aligned}$$

El último límite también es de la forma  $0/0$ . Aplicando L'Hôpital dos veces resulta

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + (h-1)e^h - h}{3h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3** Encontrar el menor valor de la constante positiva  $m$  tal que

$$mx - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$$

para todo  $x > 0$ .

**Solución:**

Se trata de encontrar el menor valor de  $m$  tal que

$$m \geq \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

para todo  $x > 0$ .

Dicho valor será el máximo absoluto, si existe, de la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x^2}$$

en el intervalo  $(0, \infty)$ .

La función  $f$  es derivable en dicho intervalo y se verifica

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x-1)2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Por tanto,  $f$  solo posee un punto crítico,  $x = 2$ . Además,

$$f'(x) > 0 \quad \text{si } x < 2$$

y

$$f'(x) < 0 \quad \text{si } x > 2.$$

En consecuencia  $f$  es creciente en el intervalo  $(0, 2)$  y decreciente en el intervalo  $(2, \infty)$ . Esto implica que  $f$  posee un máximo absoluto en el punto  $x = 2$ .

El menor valor de  $m$  es

$$m = f(2) = \frac{1}{4}.$$

**Ejercicio 4** Calcular  $f'(1)$  sabiendo que

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt.$$

**Solución:**

*Primer Método.*

Derivando resulta

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt \right).$$

Suponiendo  $f'$  continua el teorema fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena implican que

$$\frac{d}{dx} \left( \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt \right) = [2x^2 - f'(x^2)] 2x.$$

Por tanto,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt + [2x^2 - f'(x^2)] 2x.$$

Substituyendo  $x = 1$  en la identidad anterior se obtiene

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\int_1^1 [2t - f'(t)] dt + [2 - f'(1)] 2 \\ &= -0 + [2 - f'(1)] 2 \\ &= 4 - 2f'(1). \end{aligned}$$

Por último, resolviendo en  $f'(1)$  resulta

$$f'(1) = \frac{4}{3}.$$

*Segundo método.*

Multiplicando por  $x$  e integrando resulta

$$\begin{aligned} xf(x) &= \int_1^{x^2} [2t - f'(t)] dt \\ &= [t^2 - f(t)]_1^{x^2} \\ &= x^4 - f(x^2) - 1 + f(1). \end{aligned}$$

Diferenciando se obtiene

$$f(x) + xf'(x) = 4x^3 - f'(x^2)2x.$$

Substituyendo  $x = 1$  en la última expresión proporciona

$$f(1) + f'(1) = 4 - 2f'(1)$$

o bien

$$3f'(1) = 4 - f(1).$$

Ahora bien, como

$$f(1) = \int_1^1 [2t - f'(t)] dt = 0$$

resulta

$$f'(1) = \frac{4}{3}.$$

**Ejercicio 5** *Determinar el volumen de un sólido cuya base es el círculo unidad y sus secciones perpendiculares al eje  $x$  están formadas por triángulos isósceles rectángulos con un cateto apoyado sobre el círculo.*

**Solución:**

Calcularemos el volumen mediante el método de secciones. Si la base del sólido es el círculo

$$x^2 + y^2 = 1$$

las secciones perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos tienen una longitud

$$l = 2y.$$

Como dichos catetos son base y altura de los triángulos el área de las secciones es la función

$$A(x) = \frac{1}{2}(2y)^2 = 2y^2 = 2(1 - x^2).$$

Por tanto el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 A(x) dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx \\ &= 4 \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$