CALCULO 11-M
Examen Parcial Febrero 2005

Duración 2h 30m

Ejercicio 1 ***(4 puntos)***

1. *¿Es posible definir f en $x = 0$ y en $x = 1$ de forma que la función*
$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$$
sea continua?

2. *Obtener la derivada de $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.*

3. *Calcular el valor medio de $f(x) = \cos^3 x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.*

4. *Evaluar, si es posible, la integral*
$$\int_0^{+\infty} \ln x \, dx.$$

Solución:

1. La expresión
$$\frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$$
define una función continua en todos los puntos excepto en $x = 0$ y en $x = 1$ donde la expresión anterior no está definida. Si existiera límite en dichos puntos sería posible definir una extensión continua en dichos puntos tomando como valores de la función en $x = 0$ y $x = 1$ los límites correspondientes.

(a) Límite de $f(x)$ en $x = 0$. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\pi \sin(\pi x)}{\pi x(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{(x-1)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{(x-1)} \\ &= 1(-\pi) \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

(b) Límite de $f(x)$ en $x = 1$. Haciendo $h = x - 1$ resulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{(h+1)h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(\pi h)}{(h+1)h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\pi}{(h+1)} \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\pi}{(h+1)} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

En consecuencia es posible definir una función continua en toda la recta a partir de la expresión

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$$

definiendo $f(0) = f(1) = -\pi$.

2. Puesto que

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

y

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Combinando las funciones anteriores se tiene, para $x < -1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (|x+1| - |x|)^2 \\ &= (-x-1+x)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para $-1 \leq x < 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (|x+1| - |x|)^2 \\ &= (x+1+x)^2 \\ &= (2x+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Y para $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (|x+1| - |x|)^2 \\ &= (x+1-x)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 8x+4 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La función f es continua en todos los puntos por serlo la función valor absoluto. En cambio, no es diferenciable ni en $x = -1$ ni en $x = 0$ al no coincidir las derivadas laterales en dichos puntos

$$f'(-1^-) = 0 \neq f'(-1^+) = -4$$

y

$$f'(0^-) = 4 \neq f'(0^+) = 0.$$

3. El valor medio pedido es

$$\begin{aligned}
V_M &= \frac{1}{\pi/2-0}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \sin x = u & \cos x\,dx = du \\ u(0)=0 & u(\pi/2)=1 \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-u^2)\,du \\
&= \frac{2}{\pi}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{4}{3\pi}.
\end{aligned}$$

4. Se trata de una integral impropia de una función no acotada en un intervalo infinito por lo que la descomponemos en dos integrales

$$\int_0^{+\infty} \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x\,dx + \int_1^{+\infty} \ln x\,dx.$$

Para que la integral sea convergente ambas integrales han de ser convergentes. Puesto que,

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln x\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \ln x\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{1}{x}\,dx & v=x \end{array} \right\} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[x\ln x\big|_1^t - \int_1^t dx \right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[t\ln t-(t-1)\right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[t(\ln t-1)+1\right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

la integral es divergente.

Ejercicio 2 *(**3 puntos**) Analizar la gráfica de la función*

$$y = x(x-1)^{2/3}.$$

Solución:

La función está definida para todo x ya que el radicando de $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ es siempre positivo. No es par ni impar y corta al eje OX en $x=0$ y $x=1$.La función es positiva para todo $x>0$ y negativa para $x<0$. Así mismo es continua para todo x con límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$ y límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

Análisis de la derivada primera:

Para todo $x \neq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} y' &= (x-1)^{2/3} + \frac{2}{3}x(x-1)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}\left[3(x-1)+2x\right] \\ &= \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}(5x-3). \end{aligned}$$

En $x=1$,

$$\begin{aligned} y'(1+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(1+h)-y(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)h^{2/3}-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)}{h^{1/3}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'(1-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{y(1+h)-y(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)h^{2/3}-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)}{h^{1/3}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

por lo la función no es derivable en $x = 1$. En dicho punto la gráfica presenta un punto de cúspide invertida $\curlyvee$.

Los puntos críticos son el propio punto $x = 1$ y el único cero de y', el punto $x = 3/5$. El análisis del signo de la derivada primera proporciona

	$x < 3/5$	$3/5 < x < 1$	$1 < x$
$(5x-3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^{-1/3}$	$-$	$-$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$
y	crece	decrece	crece

En consecuencia la función posee un máximo local en $x = 3/5$ de valor $y = 2^{2/3}5^{-5/3}3$ y un mínimo local en $x = 1$ de valor $y = 0$.

Análisis de la derivada segunda

Para todo $x \neq 1$ se tiene

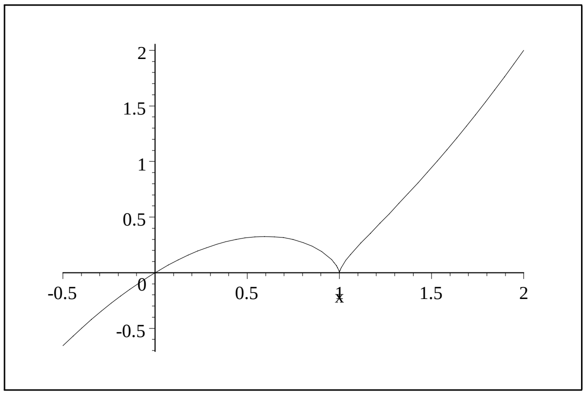
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-4/3}(5x-3) + \frac{5}{3}(x-1)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{9}(x-1)^{-4/3}\left[-(5x-3) + 15(x-1)\right] \\ &= \frac{2}{9}(x-1)^{-4/3}(5x-6). \end{aligned}$$

Analizando el signo de la derivada segunda resulta

	$x < 6/5$	$6/5 < x$
$(x-1)^{-4/3}$	$+$	$+$
$5x-6$	$-$	$+$
y''	$-$	$+$
y	cóncava	convexa

con punto de inflexión en $x = 6/5$.

Gráfica



Ejercicio 3 *(**3 puntos**) Sea R la región del plano limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$. Calcular:*

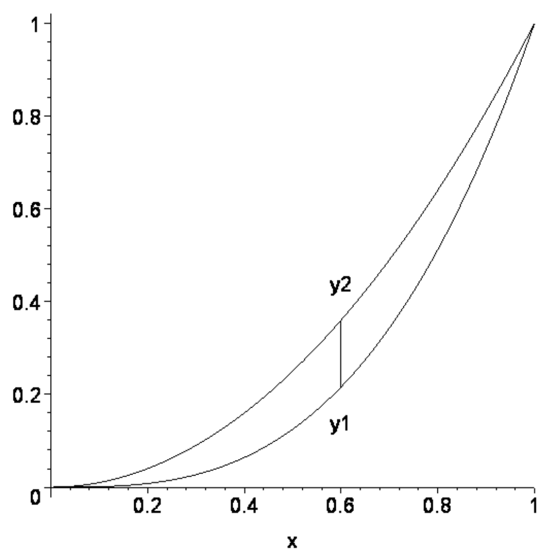
1. *El área de dicha región.*

2. *El volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OX.*

3. *El volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje $x = 2$.*

Solución:

1. Sean $y_1 = x^3$ e $y_2 = x^2$ las ordenadas correspondientes a las curvas



Los puntos de corte satisfacen $y_1 = y_2$, es decir

$$x^2 = x^3$$

cuyas soluciones son

$$x = 0 \text{ y } x = 1.$$

Por tanto el área de la región limitada por y_1 e y_2 es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y_2 - y_1)\,dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2. Para calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OX utilizamos discos perforados cuyo radio exterior es y_2 y el radio interior es y_1 resultando

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(x^4 - x^6\right)\,dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{2\pi}{35}. \end{aligned}$$

3. Para calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje $x = 2$ utilizamos capas cilíndricas de radio $r = 2 - x$ y altura $h = y_2 - y_1$ resultando

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(y_2 - y_1)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x^2 - x^3)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(2x^2 - 3x^3 + x^4\right)\, dx \\ &= 2\pi \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{7\pi}{30}. \end{aligned}$$