

Geometría de Curvas

June Amillo

March 9, 1999

1 Curvas en el espacio

El movimiento de un móvil que viaja a través del espacio viene determinado por los vectores posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ y aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$. A partir de estos vectores es posible construir un conjunto de tres vectores unitarios y ortogonales entre sí, llamado Triedro de Frenet, que se desplaza con el móvil proporcionando información precisa sobre la orientación del vehículo y la geometría de la trayectoria seguida.

En lo que sigue supondremos curvas *suaves* del espacio tridimensional, es decir curvas definidas por funciones vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$a \leq t \leq b$, en la que todas las componentes son diferenciables al menos dos veces. Diremos que una curva suave es *regular* si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$. Esto quiere decir que la velocidad nunca es cero y por tanto el móvil nunca se detiene. Este tipo de curvas no presentan puntos angulosos.

1.1 Longitud de Arco y Vector Tangente Unitario

1.1.1 Parametrización respecto del arco

El tiempo t es el parámetro natural para describir el movimiento a lo largo de una curva. La longitud de arco es el parámetro natural para describir su forma geométrica.

Para una curva regular $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, la distancia s recorrida por el móvil hasta un instante t coincide con la longitud del arco de curva

correspondiente al intervalo $[a, t]$, es decir

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du.$$

Según el Teorema fundamental del Cálculo la función $s = s(t)$ es diferenciable y

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

La norma del vector velocidad es la razón de cambio de la longitud de arco con respecto al tiempo. Por esta razón $\|\mathbf{r}'(t)\|$ se llama *rapidez* del movimiento y se la representa por $\|\mathbf{v}\|$ o simplemente v .

Para una curva regular se tiene

$$\frac{ds}{dt} > 0.$$

En consecuencia, $s = s(t)$ es creciente y posee inversa $t = t(s)$ también creciente y diferenciable. Efectuando el cambio $t = t(s)$ en $\mathbf{r}(t)$ resulta

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)).$$

Este cambio se llama *parametrización respecto de la longitud del arco*. En general la expresión que relaciona t y s es complicada por lo que la parametrización respecto de s no tiene ventajas prácticas. Su interés es principalmente teórico al hacer las definiciones más simples.

1.1.2 El Vector Tangente Unitario

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ su reparametrización respecto de la longitud de arco. Derivando respecto de s resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{ds/dt} \\ &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \end{aligned}$$

lo que muestra que el vector $d\mathbf{r}/ds$ es un vector de módulo unidad en la dirección del vector $\mathbf{r}'(t)$. Puesto que el vector velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva, el vector $d\mathbf{r}/ds$ es un vector tangente unitario.

Definition 1 Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular. Se llama **vector tangente unitario** al vector

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{v} \mathbf{v}.$$

Como quiera que $\|\mathbf{r}'(t)\| > 0$, el vector \mathbf{T} apunta en la misma dirección que $\mathbf{r}'(t)$, esto es, en la dirección de las t 's crecientes.

1.2 Curvatura y Vector Normal Principal

1.2.1 Curvatura de Curvas en el Espacio

Dada una curva cualquiera el vector tangente unitario $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ indica la dirección del movimiento en cada punto. El vector $d\mathbf{T}/ds$ mide la razón de cambio del vector \mathbf{T} con respecto a s . Como quiera que $\|\mathbf{T}\|$ permanece constante a lo largo de la curva, $d\mathbf{T}/ds$ mide realmente el cambio de dirección en el vector \mathbf{T} . Su norma $\|d\mathbf{T}/ds\|$ representa la tendencia de la curva a cambiar de dirección. Esto resulta especialmente claro para curvas planas.

En efecto, supongamos que la curva es plana y sea ϕ el ángulo formado por la tangente en un punto con el eje de abscisas. Entonces el vector unitario tangente se puede escribir como

$$\mathbf{T} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}.$$

La razón de cambio de \mathbf{T} con respecto del arco s es

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = [-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}] \frac{d\phi}{ds}$$

y por consiguiente

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|.$$

Esto sugiere la siguiente definición válida también para curvas en el espacio.

Definition 2 Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular en el espacio. Se llama **curvatura** al número

$$k = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|.$$

Si $k = 0$, la curva es una línea recta. Si $k \neq 0$ la curva se tuerce y llamaremos *radio de curvatura* a

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Puesto que,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{T}}{dt}.$$

resulta

$$k = \frac{1}{v} \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|.$$

1.2.2 Vector Normal Principal

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular y \mathbf{T} el vector tangente unitario. Puesto que \mathbf{T} es de longitud constante, $\|\mathbf{T}\| = 1$, el vector $d\mathbf{T}/ds$ es ortogonal a \mathbf{T} . Su norma es por definición la curvatura k . Dividiendo $d\mathbf{T}/ds$ por su norma resulta un vector unitario perpendicular a \mathbf{T} .

Definition 3 Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular y \mathbf{T} el vector tangente unitario en un punto de curvatura $k \neq 0$. Se llama **vector normal principal** al vector unitario

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{\|d\mathbf{T}/ds\|}.$$

El vector \mathbf{N} es un vector perpendicular a \mathbf{T} y apunta en la dirección en que la curva se tuerce.

Puesto que,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

y que $dt/ds > 0$ se tiene

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| \frac{dt}{ds}.$$

Dividiendo resulta la fórmula

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|}$$

que permite determinar el vector \mathbf{N} sin necesidad de reparametrizar respecto del arco s .

1.2.3 Componentes Normal y Tangencial de la Aceleración

El vector aceleración es la derivada del vector velocidad pero

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{T} = v \mathbf{T}$$

por consiguiente

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{T}) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt}.$$

Como

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = kv \mathbf{N}$$

se tiene

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + kv^2 \mathbf{N}.$$

La expresión anterior muestra que vector aceleración está contenido siempre en el plano formado por \mathbf{T} y \mathbf{N} independientemente de cómo se comporte la curva. Así podemos escribir

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

donde

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

es la *componente tangencial* de la aceleración y

$$a_N = kv^2 = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

la *componente normal*.

De la relación

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a_T^2 + a_N^2$$

se deduce

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

lo que permite calcular la componente normal sin necesidad de calcular la curvatura primero.

1.2.4 Fórmula para el Cálculo de la Curvatura

Se trata de derivar una fórmulas para calcular la curvatura sin necesidad de parametrizar respecto del arco.

Teniendo en cuenta la descomposición del vector aceleración según sus componentes tangencial y normal resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \mathbf{v} \times (a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}) \\ &= a_T \mathbf{v} \times \mathbf{T} + a_N \mathbf{v} \times \mathbf{N} \\ &= a_T v \mathbf{T} \times \mathbf{T} + a_N v \mathbf{T} \times \mathbf{N} \\ &= \mathbf{0} + a_N v \mathbf{B} \\ &= kv^3 \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = kv^3.$$

Despejando resulta la *Fórmula para el cálculo de la curvatura*

$$k = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3}.$$

1.3 Torsión y Triedro de Frenet

1.3.1 Vector Binormal y Triedro de Frenet

En cada punto de la curva los vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} forman un plano. Dicho plano se conoce con el nombre de *plano osculador*. El producto vectorial $\mathbf{T} \times \mathbf{N}$ será un vector unitario perpendicular a dicho plano.

Definition 4 Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular. Se llama **vector binormal** al producto $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Los vectores \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} forman un conjunto de tres vectores unitarios y ortogonales llamado *triedro de Frenet* que en el orden indicado forman un sistema orientado según la regla de la mano derecha. El plano formado por los vectores \mathbf{N} y \mathbf{B} se llama *plano normal* y el formado por los vectores \mathbf{T} y \mathbf{B} *plano rectificante*.

1.3.2 Torsión

Una curva en el espacio se tuerce de dos maneras. Por un lado se curva dentro del plano osculador y por otra se curva hacia afuera de dicho plano. La primera forma viene descrita por la curvatura, es decir por la razón de cambio de dirección del vector tangente unitario \mathbf{T} . La segunda forma de curvarse viene determinada por la razón de cambio de dirección del vector binormal $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, es decir por el vector $d\mathbf{B}/ds$.

Puesto que \mathbf{B} es de longitud constante, $\|\mathbf{B}\| = 1$, el vector $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal a \mathbf{B} . Por otra parte, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$. Diferenciando ambos miembros se obtiene

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0.$$

Ahora bien,

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{B} \cdot (k\mathbf{N}) = k\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$$

por lo que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0$$

y resulta que $d\mathbf{B}/ds$ también es ortogonal a \mathbf{T} .

Al ser $d\mathbf{B}/ds$ ortogonal a \mathbf{T} y \mathbf{B} podemos concluir que $d\mathbf{B}/ds$ es paralelo a \mathbf{N} y por consiguiente proporcional a \mathbf{N} , es decir

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

La constante de proporcionalidad recibe el nombre de torsión.

Definition 5 Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva regular y $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ el vector binormal. Se llama **torsión** al número

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}$$

La torsión mide la razón de cambio a la cual el plano osculador gira alrededor de \mathbf{T} conforme nos desplazamos a lo largo de la trayectoria. El signo menos se escribe por tradición pero no debe hacer pensar que la torsión sea negativa. Al contrario que la curvatura que nunca es negativa la torsión puede ser positiva, negativa o nula.

Puesto que,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

podemos escribir

$$\tau = -\frac{1}{v} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} \right)$$

lo que permite poder calcular la torsión sin reparametrizar respecto del arco.

1.3.3 Fórmulas para el Cálculo de la Torsión

En esta sección trataremos de derivar una fórmula para calcular la torsión sin necesidad de reparametrizar respecto del arco.

Puesto que el vector \mathbf{a} está enteramente contenido en el plano osculador el vector \mathbf{B} es ortogonal al vector aceleración. Diferenciando la relación $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = 0$ resulta

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{a} \\ &= \left(-\frac{d\mathbf{B}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \cdot \mathbf{a} \\ &= \tau v \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} \\ &= \tau v a_N. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$a_N = kv^2$$

y

$$k = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3}.$$

Por consiguiente

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \tau \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|$$

y

$$\tau = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}'}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}$$

resulta la *Fórmula para el cálculo de la torsión*

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|^2} \quad (\text{si } \mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}).$$

1.3.4 Fórmulas de Frenet

Las relaciones siguientes expresan las razones de cambio de los vectores \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} con respecto del arco s y se conocen con el nombre de *Fórmulas de Frenet*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= k \mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -k \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau \mathbf{N}. \end{aligned}$$

La primera y la tercera las hemos obtenido con anterioridad. Para demostrar la segunda diferenciamos las relaciones $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ resultando

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} + k = 0$$

y

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} - \tau = 0$$

de donde se sigue

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} = -k$$

y

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} = \tau.$$

Por último, puesto que \mathbf{N} es de longitud constante, $\|\mathbf{N}\| = 1$, el vector $d\mathbf{N}/ds$ es ortogonal a \mathbf{N} . En consecuencia

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}.$$

1.4 Ejemplo

Sea la hélice

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

donde $R, b \geq 0$ y no simultaneamente nulos.

Vector velocidad

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = -\omega R \sin \omega t \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \mathbf{j} + b \mathbf{k}.$$

Rapidez

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}.$$

Vector tangente unitario

$$\mathbf{T} = \frac{1}{v} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}} (-\omega R \sin \omega t \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \mathbf{j} + b \mathbf{k}).$$

Vector aceleración

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = -\omega R \cos \omega t \mathbf{i} - \omega R \sin \omega t \mathbf{j}.$$

Componente tangencial

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0.$$

Componente normal

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \omega R$$

Curvatura

$$k = \frac{a_N}{v^2} = \frac{\omega R}{\omega^2 R^2 + b^2}$$

Vector normal

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{1}{a_N} (\mathbf{a} - a_T \mathbf{T}) \\ &= \frac{1}{\omega R} (-\omega R \cos \omega t \mathbf{i} - \omega R \sin \omega t \mathbf{j} - 0 \mathbf{T}) \\ &= -\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j} \end{aligned}$$

Vector binormal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega R \sin \omega t & \omega R \cos \omega t & b \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}} (b \sin \omega t \mathbf{i} - b \cos \omega t \mathbf{j} + \omega R \mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

Torsión

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\frac{1}{v} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} \right) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}} \left[\frac{\omega b}{\sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}} (\cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}) \cdot (-\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j}) \right] \\
 &= \frac{\omega b}{\omega^2 R^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

La curvatura y la torsión pueden también calcularse mediante las fórmulas alternativas derivadas anteriormente:

Curvatura

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3} \\
 &= \frac{1}{(\omega^2 R^2 + b^2)^{3/2}} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega R \sin \omega t & \omega R \cos \omega t & b \\ -\omega R \cos \omega t & -\omega R \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{(\omega^2 R^2 + b^2)^{3/2}} \left\| \omega R b \sin \omega t \mathbf{i} - \omega R b \cos \omega t \mathbf{j} + \omega^2 R^2 \mathbf{k} \right\| \\
 &= \frac{\omega R}{(\omega^2 R^2 + b^2)^{3/2}} \|b \sin \omega t \mathbf{i} - b \cos \omega t \mathbf{j} + \omega R \mathbf{k}\| \\
 &= \frac{\omega R}{\omega^2 R^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Torsión

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k^2 v^6} \begin{vmatrix} v_i & v_j & v_k \\ a_i & a_j & a_k \\ a'_i & a'_j & a'_k \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\omega^2 R(\omega^2 R^2 + b^2)} \begin{vmatrix} -\omega R \sin \omega t & \omega R \cos \omega t & b \\ -\omega R \cos \omega t & -\omega R \sin \omega t & 0 \\ \omega^2 R \sin \omega t & -\omega^2 R \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\omega b}{\omega^2 R^2 + b^2}.
\end{aligned}$$