DERIVADAS

June Amillo

22/11/99

Contenido

1 El Concepto de Derivada

1.1 Introducción

En primer lugar presentamos dos problemas que tienen su origen en áreas tan diferentes como la geometría y la física. Aunque a primera vista pueda parecer que no guardan relación entre sí un pequeño análisis nos revelará que son versiones distintas de la misma idea matemática y nos conducirán directamente al concepto de derivada.

1.1.1 ¿Cómo Definir la Tangente a una Curva?

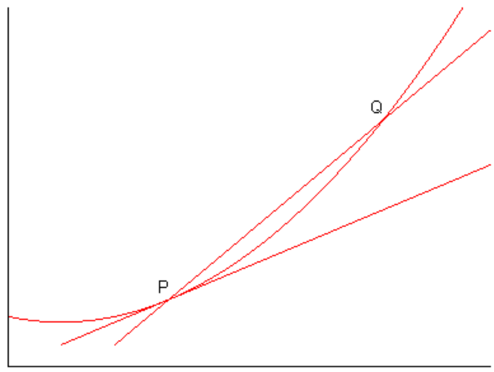
La geometría elemental define la tangente en un punto de una circunferencia como la recta perpendicular al radio que pasa por dicho punto. Definir la tangente a una curva arbitraria es más dificil y requiere un enfoque diferente.

Supongamos que la curva es la gráfica de una función f y sea $P = (x, f(x))$ un punto de dicha curva. Escojamos un $\Delta x \neq 0$ y tracemos la recta que une el punto P con el punto $Q = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Dicha recta la llamaremos *secante* por tener al menos dos puntos en común con la curva. Su pendiente es

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si ahora variamos Δx el punto Q se desplazará a lo largo de la curva. En concreto, si hacemos tender Δx hacia 0 el punto Q tenderá a confundirse con el P y la secante PQ tenderá hacia una recta cuya pendiente será el límite del cociente anterior. A esta recta la llamaremos *tangente* en P y su pendiente es por definición

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



La tangente es el límite de la secante cuando Q -> P

1.1.2 ¿Cómo Definir la Velocidad Instantánea de un Móvil?

Si un móvil se mueve a velocidad constante sabemos que la distancia recorrida es igual a la velocidad por el tiempo invertido en el trayecto, así resulta

$$\text{Velocidad } = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}.$$

Si su velocidad no fuera constante podríamos hablar de *velocidad media*. Si la distancia recorrida es una función $s(t)$ del tiempo t la velocidad media en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ será

$$\text{Velocidad Media } = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Si reducimos Δt hacia 0 estaremos midiendo la velocidad media en intervalos cada vez más pequeños. El límite del cociente anterior cuando Δt tiende hacia 0 define la *velocidad instantánea* del móvil,

$$\text{Velocidad Instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

1.2 La Derivada en un Punto.

1.2.1 Definiciones

Sea $y = f(x)$ una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c - r, c + r)$. Tomemos un incremento de la variable independiente

$$\Delta x = h$$

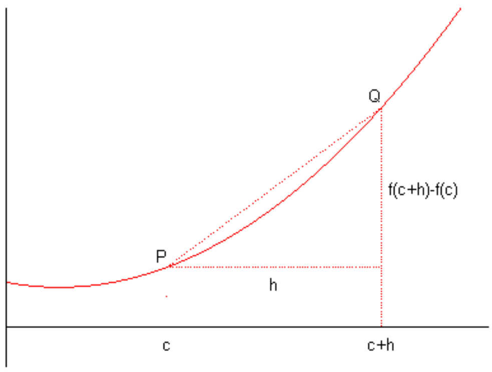
siendo $h \neq 0$ y tal que $c + h \in D$. A dicho incremento le corresponde un incremento de la variable dependiente

$$\Delta y = \Delta f = f(c + h) - f(c).$$

Llamemos *cociente incremental* o *razón media de cambio* de f en el intervalo que une los puntos c y $c + h$ al cociente

$$F(c, h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

El cociente incremental representa la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P = (c, f(c))$ y $Q = (c + h, f(c + h))$ pertenecientes a la gráfica de f. También se puede interpretar como la razón media de cambio de $y = f(x)$ con respecto de x en el intervalo $[c, c + h]$.



El cociente incremental es la pendiente de la secante

Para cada c fijo, el cociente incremental es una función de h. Esta función se halla definida para valores de h positivos y negativos pero no en $h = 0$. Cuando h tiende a 0 su límite, si existe, se conoce como la *derivada* de f en c.

Definición 1 *Sea f una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c - r, c + r)$. La* ***derivada*** *de f en c es*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre que dicho límite exista.

Si el límite anterior existe se dice que f es *diferenciable en* c. De forma similar, se dice que f es *diferenciable en el conjunto* $S \subset D$ si es diferenciable en cada punto de S y símplemente *diferenciable* si es diferenciable en todo punto de su dominio D.

Otras formas de representar la derivada en $x = c$ son

$$y'(c), \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}, \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} \qquad \text{o} \qquad (Df)(c).$$

Mediante el cambio de variable $x = c + h$ la definición de derivada se puede expresar de de la siguiente manera:

Definición 2 *Sea f una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c-r, c+r)$. La **derivada** de f en c es*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

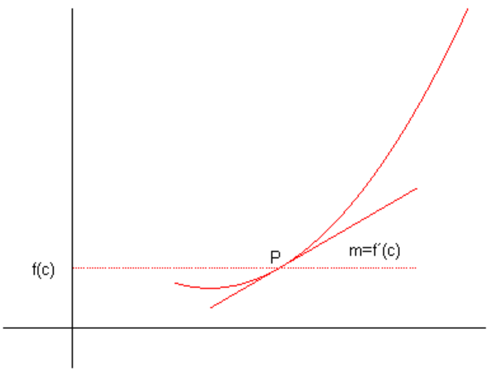
siempre que el límite exista.

1.2.2 Significado de la Derivada

Si $y = f(x)$ es diferenciable en $x = c$ la derivada de f en c es un número. Este número puede interpretarse de dos maneras diferentes:

1. Como la *pendiente* de la gráfica de f en c, o
2. Como la *razón de cambio instantánea* de y respecto de x.

La primera interpretación permite definir la *recta tangente a la gráfica de f* en el punto $(c, f(c))$ como la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $m = f'(c)$.



La pendiente de la tangente es f'(c)

La ecuación punto pendiente de la tangente en dicho punto es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

La interpretación de la derivada como la razón de cambio instantánea de la variable dependiente permite dar sentido a muchos conceptos utilizados en otras ciencias. Por ejemplo, en Mecánica se define la *velocidad instantánea* de un móvil como la derivada del espacio recorrido con respecto del tiempo, en Electromagnetismo se define la *intensidad de corriente* como la derivada de la carga eléctrica con respecto del tiempo, en termodinámica se define el *flujo calorífico* como la derivada de la temperatura respecto de la posición, en economía se define el *coste marginal* como la derivada del coste total de la producción respecto del número de unidades producidas, etc.

1.2.3 Ejemplos de Funciones Diferenciables

Dada una función $y = f(x)$ para comprobar la diferenciabilidad en $x = c$ mediante la definición de derivada debemos seguir el siguiente proceso:

1. Considerar un incremento de la variable independiente
$$\Delta x = h.$$

2. Obtener el incremento correspondiente de la función
$$\Delta y = f(c + h) - f(c)$$

3. Calcular el cociente incremental
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

4. Determinar el límite del cociente anterior
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Ejemplo 3 *Calcular la derivada de $f(x) = mx + b$ en el punto $x = c$.*

Incremento de la variable independiente

$$\Delta x = h.$$

Incremento de la función

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(c+h) - f(c)\\ &= [m(c+h)+b] - [mc+b]\\ &= mh.\end{aligned}$$

Cociente incremental

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\ &= \frac{mh}{h}\\ &= m.\end{aligned}$$

Derivada en $x = c$

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} m\\ &= m.\end{aligned}$$

Observamos que en este caso la derivada no depende del punto $x = c$ en el que se calcula. Esto era de esperar tratándose de una función $f(x)$ cuya gráfica es una línea recta. De suyo la recta tangente en cualquier punto coincide con la propia gráfica de f. En efecto, la ecuación de la recta tangente en $x = c$ es

$$y - f(c) = f'(c)(x-c)$$

o sea

$$\begin{aligned}y &= f'(c)(x-c) + f(c)\\ &= m(x-c) + (mc+b)\\ &= mx + b\\ &= f(x). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 4 *Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto $x = c$.*

Incremento de la variable independiente

$$\Delta x = h.$$

Incremento de la función

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(c+h) - f(c)\\ &= (c+h)^2 - c^2\\ &= 2ch + h^2.\end{aligned}$$

Cociente incremental

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\\ &= \frac{2ch + h^2}{h}\\ &= 2c + h.\end{aligned}$$

Derivada en $x = c$

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2c + h)\\ &= 2c. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 5 *Calcular la tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto $x = 1$.*

Incremento de la variable independiente

$$\Delta x = h.$$

Incremento de la función

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1+h) - f(1)\\ &= \frac{1}{1+h} - 1\\ &= \frac{-h}{1+h}.\end{aligned}$$

Cociente incremental

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\
&= \frac{-1}{1+h}.
\end{aligned}
$$

Derivada en $x = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

La recta tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

es decir

$$y - 1 = -(x-1)$$

o bien

$$y = -x + 2. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 6 *Estudiar la diferenciabilidad de*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$.

Incremento de la variable independiente

$$\Delta x = h.$$

Incremento de la función

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(0+h) - f(0)\\ &= h\sin\frac{1}{h} - 0\\ &= h\sin\frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Cociente incremental

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\ &= \sin\frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Derivada en $x = 0$

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}\end{aligned}$$

como este último límite no existe f no es diferenciable en $x = 0$. ■

1.2.4 Derivadas Laterales

Si en la definición de derivada el límite se reemplaza por el límite por la derecha (resp. izquierda) se obtiene el concepto de derivada por la derecha (resp. izquierda) en c.

Definición 7 *Sea f una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $[c, c+r)$. La* ***derivada por la derecha*** *de f en c es*

$$f'(c+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

siempre que el límite exista.

Análogamente,

Definición 8 *Sea f una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c-r,c]$. La* ***derivada por la izquierda*** *de f en c es*

$$f'(c-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

siempre que el límite exista.

Las derivadas por la derecha e izquierda se conocen como *derivadas laterales.* Cuando de una función se diga que es derivable en los extremos de un intervalo la derivada en estos casos se entenderá como derivada por la derecha o izquierda según se trate del extremo de la izquierda o derecha respectivamente. De acuerdo con la relación existente entre el límite y los límites laterales podemos asegurar:

Teorema 9 *f es diferenciable en c si y sólo si existen las derivadas laterales y éstas coinciden entre sí.*

1.2.5 Continuidad de las Funciones Diferenciables

No todas las funciones son diferenciables. Para que una función sea diferenciable es necesario que sea continua. En efecto, si f es diferenciable en c se verifica

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}[f(c+h)-f(c)] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(c+h)-f(c)}{h}h\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right]\lim_{h\to 0} h \\
&= f'(c)\times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0}[f(c+h)-f(c)+f(c)] \\
&= \lim_{h\to 0}[f(c+h)-f(c)] + \lim_{h\to 0} f(c) \\
&= 0 + f(c) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

lo que muestra que f es continua en c.

Teorema 10 (Continuidad y Diferenciabilidad) *Sea f una función diferenciable en c. Entonces, f es continua en c.*

Por tanto, según el resultado anterior, las funciones discontinuas en c no son diferenciables en dicho punto. Solo las funciones continuas pueden ser diferenciables.

Ahora bien, el recíproco es falso ya que no todas las funciones continuas son diferenciables. Veamos tres situaciones típicas que destruyen la diferenciabilidad de una función continua.

Ejemplo 11 (Existencia de puntos anguloso) *La función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.*

En efecto, el incremento de la función correspondiente a un incremento $\Delta x = h$ es

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(0+h) - f(0) \\ &= |0+h| - 0, \end{aligned}$$

y el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0+h| - 0}{h}.$$

El límite por la derecha del cociente anterior es

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|0+h| - 0}{h} = +1$$

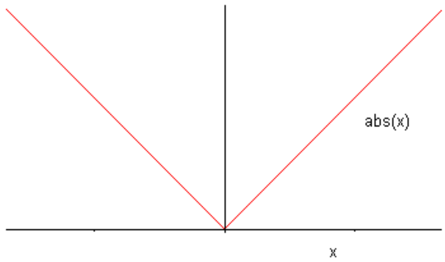
y el límite por la izquierda

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|0+h| - 0}{h} = -1.$$

En este caso la función posee derivadas laterales

$$f'(0+) = +1, \qquad f'(0-) = -1$$

pero éstas no coinciden, por lo que no es diferenciable.



Puntos anguloso. No existe f'(0).

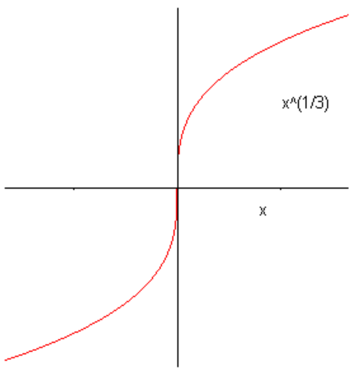
La gráfica de la función $|x|$ presenta un pico o esquina en el punto $x = 0$. ■

Ejemplo 12 (Existencia de tangente vertical) *La función* $f(x) = x^{1/3}$ *no es diferenciable en* $x = 0$*.*

En efecto, en dicho punto se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{x\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

El límite es infinito por lo que la derivada no existe.



f'(0) tiende a infinito. Tangente vertical.

En este caso la gráfica de la función presenta una tangente vertical en $x = 0$. $\blacksquare$

Ejemplo 13 (Existencia de cúspide) *La función* $f(x) = \sqrt{|x|}$ *no es diferenciable en* $x = 0$*.*

En efecto, el cociente incremental es

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{|0+h|} - \sqrt{|0|}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{|h|}}{h}. \end{aligned}$$

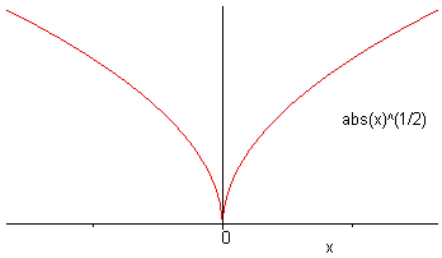
Por la derecha,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

y por la izquierda

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{\sqrt{-h}}{-h} \right) \\ &= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{-h}} \right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Por la derecha la pendiente tiende a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$.



Cúspide. No existe f'(0).

La función no es diferenciable, su gráfica presenta una cúspide en $x = 0$. ■

1.3 Aproximación Lineal

1.3.1 Linealización

Las funciones diferenciables se comportan localmente como una recta. Esto significa que cuando se magnifica su gráfica, en torno a un punto, ésta se asemeja cada vez más a una línea recta. En concreto, en las proximidades de un punto, la gráfica de una función diferenciable se confunde con la tangente en dicho punto. Dicho de otra forma la tangente es una buena aproximación de la función.

Si f es diferenciable en c, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en c es

$$y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Esta recta es la gráfica de una función lineal que se denomina *linealización* de f.

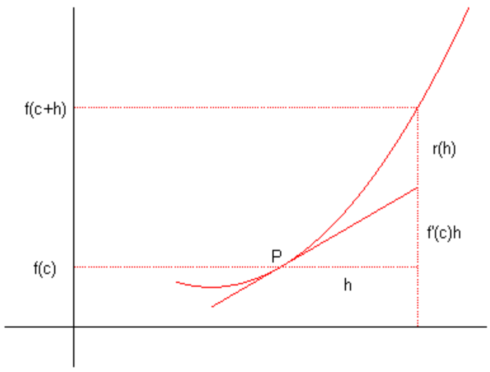
Definición 14 *Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en c. Se llama* ***linealización*** *o* ***aproximación lineal*** *de f en c a la función lineal L definida por la expresión*

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Para estudiar la validez de la aproximación $f(x) \approx L(x)$ en las proximidades de $x = c$ examinaremos la diferencia entre $f(x)$ y $L(x)$. Para ello supongamos que el dominio D de f contiene un intervalo de la forma $(c-r, c+r)$ y definamos

$$\begin{aligned} r(h) &= f(c+h) - L(c+h) \\ &= f(c+h) - f(c) - f'(c)h \end{aligned}$$

para todo $h \in (-r, r)$. La función $r(h)$ representa el error que se comete al substituir $f(x)$ por $L(x)$ en $x = c + h$.



El error r(h)

Puesto que,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \\ &= f'(c) - f'(c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 15 *Sea f una función real de dominio D y supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c-r, c+r)$. Si f es diferenciable en c se verifica*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = 0.$$

El límite anterior muestra que la diferencia $r(h)$ tiende a cero cuando h tiende a cero más deprisa que el propio h lo que justifica que digamos que $f(x) \simeq L(x)$ en las proximidades de $x = c$.

Haciendo

$$\varepsilon(h) = \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h}$$

podemos concluir:

Observacion 16 *Si f es diferenciable en c existe una función $\varepsilon(h)$ tal que $\varepsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ y*

$$f(c+h) - f(c) = [f'(c) + \varepsilon(h)]\, h.$$

1.3.2 Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en un punto c y

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

su linealización. Puesto que f y L son aproximadamente iguales alrededor de c, es posible estimar las variaciones de f mediante las variaciones de L. Supongamos un incremento Δx de la variable independiente x. El incremento correspondiente $\Delta y = \Delta f$, en el valor de f es

$$\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c)$$

mientras que el incremento en el valor de L viene dado por

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(c+\Delta x) - L(c) \\ &= [f(c) + f'(c)(c + \Delta x - c)] - [f(c) + f'(c)(c - c)] \\ &= f'(c)\Delta x. \end{aligned}$$

Para incrementos pequeños de x podemos suponer $\Delta f \approx \Delta L$, i.e.

$$\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x.$$

Definición 17 *Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en c. Se llama **diferencial** de la variable independiente x y se representa por dx, a cualquier incremento de dicha variable, i.e. $dx = \Delta x$. Se llama **diferencial** de la variable dependiente y y se representa por dy, al producto*

$$dy = f'(c)dx.$$

Observamos que el incremento de la variable x es por definición la diferencial de x, i.e $dx = \Delta x$. Pero, mientras que Δy es el incremento de la función f, i.e. $\Delta y = \Delta f$, la diferencial de y representa el incremento en la linealización L de f, i.e. $dy = \Delta L$. No obstante, para incrementos pequeños de x, la diferencial dy y el incremento Δy son aproximadamente iguales, i.e. $dy \approx \Delta y$.

Mientras que dy es fácil de calcular no se puede decir lo mismo de Δy. La substitución de incrementos por diferenciales permite obtener las siguientes estimaciones:

- Estimación del *incremento absoluto* Δy
$$\Delta y \approx f'(c)dx = dy.$$
- Estimación del *incremento relativo*
$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{f(c)} \approx \frac{f'(c)dx}{f(c)} = \frac{dy}{y}$$
- Estimación del *incremento porcentual* por
$$100 \times \frac{\Delta y}{y} \approx 100 \times \frac{dy}{y}.$$

2 Derivación

En esta sección presentamos la derivada como un proceso que partiendo de una función da lugar a una nueva función. A continuación estableceremos las reglas para obtención de derivadas y las aplicaremos a las funciones elementales. Los Sistemas de Computación Simbólica incorporan todas estas reglas junto con potentes algoritmos que proporcionan la derivada de cualquier función elemental como respuesta a una simple orden. También comentaremos como proceder en el caso de funciones definidas a trozos.

2.1 Derivadas

El proceso por el cual se obtiene la derivada de una función en un punto se llama *diferenciación*. Si aplicamos este proceso a todos los puntos del dominio de la función se obtiene una nueva función tal que a cada x asocia la derivada de f en x. Esta función se conoce como la *derivada* de f y su dominio está formado por todos aquellos puntos en los que f sea diferenciable.

Definición 18 *Sea f una función real de dominio D y S el subconjunto de D formado por los puntos en los que f es diferenciable. Se llama* ***derivada*** *de f a la función f' tal que a cada $x \in S$ asocia la derivada de f en x, i.e.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Otras formas de representar la función derivada son

$$y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df}{dx} \qquad \text{o} \qquad Df.$$

En un principio la derivada de una función se puede obtener calculando directamente el límite del cociente incremental correspondiente. Así se puede obtener la derivada de algunas funciones elementales simples. Con estas derivadas y con las reglas de derivación que se obtienen partir de la definición es posible calcular las derivadas de funciones más complicadas.

Puesto que la derivada de una función es otra función podremos tratar de hallar su derivada. Se llama *derivada segunda* de $y = f\ (x)$ a la derivada de $f'(x)$ y se la representa por $f''(x)$. Es decir,

$$f''(x) = (f')'(x).$$

Otras formas diferentes de expresar la derivada segunda son

$$y'' = (y')',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

o

$$D^2f = D(Df).$$

Análogamente se define la *derivada tercera* como la derivada de la derivada segunda y así sucesivamente. En general la *derivada n-ésima* se define como la derivada de la derivada de orden $n-1$ y se representa por

$$f^{(n)}, \qquad y^{(n)}, \qquad \frac{d^ny}{dx^n}, \qquad \frac{d^nf}{dx^n} \qquad \text{o} \qquad D^nf.$$

2.2 Algebra de Derivadas

2.2.1 Reglas Algebraicas de Derivación

Teorema 19 (Algebra de derivadas) *Si f y g son funciones diferenciables y k una constante se verifican las siguientes reglas:*

1. *$f+g$ es diferenciable y*
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2. *kf es diferenciable y*
$$(kf)'(x) = kf'(x)$$

3. *fg es diferenciable y*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. *f/g es diferenciable siempre que $g(x) \neq 0$ y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dem.:

1. El cociente incremental correspondiente a la función $(f+g)(x)$ es
$$\begin{aligned} F(x,h) &= \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} F(x,h) \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

2. El cociente incremental correspondiente a kf es

$$\begin{aligned} F(x,h) &= \frac{(kf)(x+h)-(kf)(x)}{h} \\ &= \frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} \\ &= k\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (kf)'(x) &= \lim_{h\to 0} F(x,h) \\ &= \lim_{h\to 0}\left[k\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= kf'(x). \end{aligned}$$

3. En este caso se requiere algo más de elaboración. El cociente incremental correspondiente al producto $(fg)(x)$ es

$$\begin{aligned} F(x,h) &= \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} F(x,h) \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right]+\lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \end{aligned}$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que al ser g diferenciable en x, g es continua en x y se verifica

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

4. El cociente incremental correspondiente a la función $(1/g)(x)$ es

$$\begin{aligned} G(x,h) &= \frac{(1/g)(x+h) - (1/g)(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] \\ &= -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} G(x,h) \\ &= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right] \\ &= \left[-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right] \\ &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que al ser g diferenciable en x, g es continua en x y se verifica

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

Por último escribiendo el cociente f/g como un producto

$$\frac{f}{g} = f\frac{1}{g},$$

y aplicando la regla de la derivada del producto resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

La regla de la suma y la del producto por una constante pueden combinarse en una sola y extenderse por inducción a un número finito cualquiera de funciones y constantes pudiéndose expresar e siguiente resultado.

Corolario 20 *Si $f_1(x),\ f_2(x),\cdots,\ f_n(x)$ son diferenciables y $k_1,\ k_2,\cdots,k_n$ son constantes entonces*

$$[k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ \cdots + k_n f_n]'(x) = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \ \cdots + k_n f_n'(x)$$

2.2.2 Derivadas de las Funciones Polinómicas y Racionales

Ejemplo 21 (Derivada de una constante) *Si $f(x) = k$ entonces*

$$f'(x) = 0$$

para todo x real.

En efecto, el cociente incremental correspondiente es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Por consiguiente,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 22 (Derivada de la identidad) *Si $f(x) = x$ entonces*

$$f'(x) = 1$$

para todo x real.

En efecto, el cociente incremental correspondiente es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Por consiguiente,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 23 (Derivada de potencias de exponente entero positivo) *Para todo entero positivo n la derivada de la función $p(x) = x^n$ es*

$$p'(x) = nx^{n-1}.$$

La fórmula es evidentemente cierta para $n = 1$ ya que si $p(x) = x$

$$p'(x) = 1$$

por lo que

$$p'(x) = 1x^0 = 1x^{1-1}.$$

La fórmula tambien es cierta para $n = 2$. En efecto si $p(x) = x^2$ escribimos

$$p(x) = xx.$$

Aplicando la regla de la derivación del producto resulta

$$p'(x) = 1x + x1 = 2x.$$

Por inducción supongamos la fórmula válida para $n = k$. Entonces, si $p(x) = x^{k+1}$ escribimos

$$p(x) = x^k x.$$

Aplicando la regla de la derivación del producto y la hipótesis de inducucción, i.e. que la derivada de x^k es kx^{k-1} resulta

$$p'(x) = kx^{k-1}x + x^k 1 = (k+1)x^k$$

lo que prueba que la fórmula es también válida para $n = k + 1$. ■

Ejemplo 24 (Derivada de un polinomio) *La derivada del polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es el polinomio*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Resulta de aplicar la fórmula de derivación del corolario anterior junto con la regla de derivación de las potencias. ■

Ejemplo 25 (Derivada de potencias de exponente entero negativo) *Para todo entero negativo n la derivada de la función $p(x) = x^n$ es*

$$p'(x) = nx^{n-1}.$$

Si n es un entero negativo $m = -n$ es un entero positivo. Escribiendo

$$p(x) = x^n = x^{-(-n)} = \frac{1}{x^m}$$

y aplicando la regla de la derivación del cociente resulta

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.3 Derivadas de las Funciones Trigonométricas

Ejemplo 26 (Derivadas del Seno y Coseno) *Si $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ entonces*

$$f'(x) = \cos x \qquad y \qquad g'(x) = -\sin x$$

para todo x real.

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \frac{2}{h} \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2} \\ &= \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= \left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]\left[\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la continuidad del coseno y el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Análogamente, usando la identidad trigonométrica

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

resulta

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \frac{-2}{h}\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2} \\
&= \frac{-2}{h}\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{-2}{h}\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= \left[-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]\left[\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la continuidad del coseno y el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 27 (Derivada de las demás funciones trigonométricas)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x\\
\frac{d}{dx}\cot x &= -\csc^2 x\\
\frac{d}{dx}\sec x &= \sec x\tan x\\
\frac{d}{dx}\csc x &= -\csc x\cot x
\end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}\\
&= \frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cot x &= \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x}\\
&= \frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}\\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}\\
&= -\csc^2 x.
\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}\\
&= \frac{0\cos x-1(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x}\\
&= \sec x\tan x
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\csc x &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x} \\
&= \frac{0\sin x - 1\cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \\
&= -\csc x \cot x. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.3 Composición y Derivadas

2.3.1 Regla de la Cadena

La regla de la cadena permite derivar funciones obtenidas mediante composición de otras más simples. Supongamos que y es una función de u,

$$y = g(u)$$

y que u es a su vez una función de x

$$u = f(x).$$

Componiendo las funciones f y g, la variable dependiente y se convierte en una función de la variable final x

$$y = g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Pues bien la regla de la cadena permite calcular la derivada de y con respecto de x como el producto de la derivada de y respecto de la variable intermedia u por la derivada de u con respecto de la variable final x, es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

De forma más precisa:

Teorema 28 (Regla de la cadena) *Si f es diferenciable en x y g lo es en $f(x)$, la composición $g \circ f$ es diferenciable en x y se verifica*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dem.: Sea $h \neq 0$. Por ser f diferenciable en x existe un $\varepsilon(h)$ tal que

$$f(x+h) - f(x) = [f'(x) + \varepsilon(h)]h$$

y

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

De la misma forma por ser g diferenciable en $u = f(x)$ existe un $\eta(k)$ tal que

$$g(u+k) - g(u) = [g'(u) + \eta(k)]k$$

y

$$\lim_{k \to 0} \eta(k) = 0.$$

Tomando $k = f(x+h) - f(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(f(x)+k) - g(f(x)) \\ &= [g'(f(x)) + \eta(k)]k \\ &= [g'(f(x)) + \eta(k)][f(x+h) - f(x)] \\ &= [g'(f(x)) + \eta(k)][f'(x) + \varepsilon(h)]h. \end{aligned}$$

Dividiendo por h, resulta

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= [g'(f(x)) + \eta(k)][f'(x) + \varepsilon(h)] \\ &= g'(f(x))f'(x) + \eta(k)[f'(x) + \varepsilon(h)]. \end{aligned}$$

La regla de la cadena se obtiene tomando límites cuando h tiende a cero. El primer sumando no depende de h. El segundo sumando tiende hacia cero. En efecto, por ser f diferenciable en x, f es continua. Por consiguiente, $k = f(x+h) - f(x)$ tiende a cero cuando h tiende a cero. Por último, tanto $\varepsilon(h)$ como $\eta(k)$ tienden a cero cuando h y k tienden a cero respectivamente. ■

Ejemplo 29 *Encontrar la derivada de la función*

$$f(x) = \sin^5 x.$$

Tomando

$$u = \sin x$$

se tiene

$$y = u^5.$$

Mediante aplicación de la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ &= (5u^4)(\cos x) \\ &= 5\sin^4 x \cos x. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

La regla de la cadena puede aplicarse repetidamente. De esta forma si

$$y = h(v), \qquad v = g(u) \qquad \text{y} \qquad u = f(x)$$

se tiene

$$y = h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 30 *Encontrar la derivada de la expresión*

$$y = \sin^5(3x^2 - x + 1).$$

Tomando

$$y = v^5, v = \sin u \text{ y } u = 3x^2 - x + 1$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= (5v^4)(\cos u)(6x - 1) \\ &= 5(6x - 1)\sin^4(3x^2 - x + 1)\cos(3x^2 - x + 1) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.2 Derivación Implícita

Supongamos una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$. A veces resulta fácil despejar la variable y en función de la x. Por ejemplo, despejando y en la ecuación

$$x^2 - y = 0$$

resulta la función

$$y = x^2.$$

Otras veces, se obtienen dos posibles funciones como en el caso de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

donde despejando y resulta

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

o

$$y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Por el contrario, en muchas ocasiones despejar la variable y no resulta sencillo, puede ser imposible o simplemente no interesa. En todos aquellos casos en que exista una función diferenciable $y = f(x)$ satisfaciendo la ecuación $F(x, y) = 0$ podemos hallar la derivada de y con respecto de x sin necesidad de conocer la forma explícita dicha función. El procedimiento se conoce como *derivación implícita* y es una aplicación de la regla de cadena. Por ejemplo, tomando la ecuación del círculo unidad

$$x^2 + y^2 = 1$$

considerando y como función de x y derivando utilizando la regla de cadena cada vez que aparezca la y, resulta

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando la derivada de y con respecto de x en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Dicho procedimiento se puede repetir para obtener las derivadas de orden superior. Por ejemplo, la derivada segunda es

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{y - xy'}{y^2} \\ &= -\frac{y - x\frac{-x}{y}}{y^2} \\ &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3}. \end{aligned}$$

La existencia de una función diferenciable $y = f(x)$ verificando la ecuación $F(x, y) = 0$ se estudia en el cálculo diferencial de varias variables.

2.4 Derivación de Funciones Inversas

2.4.1 Regla de la Derivada de la Inversa

Ya hemos mencionado que si f es continua y posee inversa f^{-1}, ésta también es continua. Si f es diferenciable resulta natural preguntarse las siguientes cuestiones: ¿Es f^{-1} diferenciable?. Si f^{-1} es diferenciable, ¿cómo podemos calcular su derivada?.

Es posible demostrar que si f' no se anula, f^{-1} es diferenciable. Veamos como calcular su derivada en este supuesto siguiendo el procedimiento de la derivación implícita. Siendo $y = f^{-1}(x)$ por la propia definición de función inversa se verifica

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

o bien

$$f(y) = x.$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es una función de x a través de $y = f^{-1}(x)$. Podremos por tanto derivar dicho lado con respecto de x usando la regla de la cadena. Por otra parte la derivada con respecto de x del lado derecho es símplemente 1. En consecuencia, se tiene

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y)\,\frac{dy}{dx} = f'(y)\,y' = 1.$$

Como estamos suponiendo $f'(y) \neq 0$, resulta

$$y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Teorema 31 (Derivada de la inversa) *Sea f una función diferenciable con inversa f^{-1}. Sea x un punto en el dominio de f^{-1} e $y = f^{-1}(x)$. Si $f'(y) \neq 0$ la función inversa f^{-1}es diferenciable en x y se verifica*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Además observamos que los puntos en los que se anula f' son puntos de tangente horizontal en la gráfica de f. Como la gráfica de f^{-1} es simétrica de la de f respecto de la bisectriz del primer cuadrante en los puntos correspondientes su gráfica tendrá una tangente vertical. Es decir la inversa no puede ser diferenciable en aquellos puntos tales que $f'(y) = 0$.

Aunque el resultado anterior incluye expresamente la fórmula de la derivada de la inversa, es más fácil obtener ésta siguiendo el procedimiento descrito anteriormente que mediante la fórmula.

2.4.2 Derivadas de Potencias de Exponente Racional

Ejemplo 32 (Derivadas de Potencias Racionales) *Para todo número racional r la derivada de la función $f(x) = x^r$ es*

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

siempre que esta expresión esté definida.

En primer lugar supondremos que $r = 1/n$, n entero. La función

$$y = x^{1/n}$$

es la inversa de la función

$$x = y^n.$$

Esta última función es diferenciable. Su inversa será también diferenciable excepto en los puntos tales que

$$\frac{d}{dy}y^n = ny^{n-1} = 0.$$

lo que implica $y = 0$ y por tanto $x = 0$.

Para calcular su derivada seguimos el procedimiento antes descrito que resumimos en los siguientes pasos

$$\begin{aligned} y &= x^{1/n} \\ y^n &= x \\ ny^{n-1}y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}. \end{aligned}$$

Ahora sea $r = m/n$, m, n enteros, un número racional cualquiera distinto de 0. Podemos expresar la función $f(x) = x^r$ como composición de dos funciones escribiendo

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Aplicando la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1}mx^{m-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{m(\frac{1}{n}-1)+m-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \\ &= rx^{r-1}. \end{aligned}$$

Para $r = 0$, se tiene $f(x) = x^0 = 1$ si $x \neq 0$ por lo que $f'(x) = 0 = 0x^{0-1}$.
■

2.4.3 Derivada de las Funciones Trigonométricas Inversas

Ejemplo 33 (Derivadas de las Inversas Trigonométricas)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1 \\
\frac{d}{dx}\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1 \\
\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x &= -\frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1 \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1
\end{aligned}$$

La función

$$y = \arcsin x, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

es la inversa de

$$x = \sin y, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

La función seno es diferenciable. Su inversa será también diferenciable excepto en los puntos en los que

$$\frac{d}{dy}\sin y = \cos y = 0,$$

o sea excepto en los puntos $y = \pm\pi/2$ que corresponden a $x = \pm 1$.

Cálculo de la derivada

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin x \\
\sin y &= x \\
\cos y\, y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

La función

$$y = \arctan x, \qquad -\infty < x < \infty$$

es la inversa de

$$x = \tan y, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

La función tangente es diferenciable en dicho intervalo. Su inversa será también diferenciable excepto en los puntos en los

$$\frac{d}{dy}\tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = 0.$$

Puesto que la secante es siempre distinta de cero la función arco-tangente será siempre diferenciable.

Para calcular su derivada seguimos el procedimiento antes descrito y que se resume en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
y &= \arctan x \\
\tan y &= x \\
\frac{1}{\cos^2 y} y' &= 1 \\
y' &= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

La función

$$y = \operatorname{arcsec} x, \qquad |x| \geq 1$$

es la inversa de

$$x = \sec y, \qquad \left\{0 \leq y < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} < y \leq \pi\right\}.$$

La función secante es diferenciable. Su inversa será también diferenciable excepto en los puntos en los

$$\frac{d}{dy}\sec y = \sec y \tan y = 0.$$

La secante es siempre distinta de cero y la función tangente se anula para $y = 0$ o $y = \pi$ a los que corresponden $x = 1$ o $x = -1$ respectivamente. Por tanto, la función arco-secante será diferenciable en la región $|x| > 1$.

Cálculo de la derivada mediante derivación implícita

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcsec} x \\
\sec y &= x \\
\sec y \tan y \, y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\sec y \tan y}.
\end{aligned}$$

Para simplificar la última expresión debemos expresar la tangente en función de la secante. Esto se hace de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\tan y &= \frac{\sin y}{\cos y} \\
&= \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y} \\
&= \frac{\sqrt{\cos^2 y\,(\sec^2 y - 1)}}{\cos y} \\
&= \frac{|\cos y| \sqrt{\sec^2 y - 1}}{\cos y} \\
&= \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}
\end{aligned}$$

donde el signo positivo corresponde a $0 \leq y < \pi/2$ y el signo negativo a $\pi/2 < y \leq \pi$ es decir cuando $x > 1$ o $x < 1$ respectívamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sec y \tan y} \\
&= \frac{1}{\sec y \left(\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}\right)} \\
&= \frac{1}{x\left(\pm\sqrt{x^2-1}\right)} \\
&= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

Las otras funciones inversas se dejan como ejercicio. ■

2.4.4 Derivada del Logaritmo y de la Exponencial

Ejemplo 34 (Derivada del Logaritmo y de la Exponencial)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}e^x &= e^x.
\end{aligned}$$

Como ya mencionamos anteriormente las propiedades de la función logaritmo las probaremos posteriormente mediante la definición del logaritmo como una integral. De momento supondremos que la función logaritmo es diferenciable y que su derivada está dada por la fórmula anterior.

La exponencial es la inversa del logaritmo. Como el logarimo no tiene tangente horizontal en ningún punto la exponencial es diferenciable. Su derivada la calculamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
y &= e^x \\
\ln y &= x \\
\frac{1}{y}y' &= 1 \\
y' &= y = e^x. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.4.5 Derivada de las Funciones Hiperbólicas y sus Inversas

Ejemplo 35 (Derivada de funciones hiperbólicas)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh x &= \cosh x \\
\frac{d}{dx}\cosh x &= \sinh x \\
\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

Puesto que,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad y \qquad \frac{d}{dx}e^{-x} = -e^x$$

resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh x &= \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \cosh x.
\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh x &= \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \sinh x.
\end{aligned}$$

Las demás derivadas se obtienen a partir de éstas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}.
\end{aligned}$$

El resto se obtienen de forma análoga. ■

Ejemplo 36 (Derivadas de las hiperbólicas inversas)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1 \\
\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x &= \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x| < 1
\end{aligned}$$

Derivada del argumento seno hipérbólico,

$$\begin{aligned}
y &= \sinh^{-1} x \\
\sinh y &= x \\
\cosh y\, y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

La derivada anterior está definida para todo x ya que el seno hiperbólico no tiene ningún punto de tangente horizontal.

Derivada del argumento coseno hipérbólico,

$$\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1} x \\
\cosh y &= x \\
\sinh y\, y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

El argumento coseno hiperbólico está definido para $x \geq 1$. Su derivada no está definida para $x = 1$, aunque solo sea por la derecha, ya que en dicho punto el coseno hiperbólico tiene una pendiente horizontal.

Derivada del argumento tangente hiperbólica,

$$\begin{aligned}
y &= \tanh^{-1} x \\
\tanh y &= x \\
\frac{1}{\cosh^2 y} y' &= 1 \\
y' &= \cosh^2 y = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

La función $y = \tanh^{-1} x$, está definida en el intervalo $(-1, 1)$ y lo mismo ocurre con su derivada ya que la tangente hiperbólica no tiene pendiente horizontal en ningún punto. ■

2.5 Derivadas de Funciones Definidas a Trozos

Una función a trozos se caracteriza por que su dominio está dividido en varios intervalos y la función se define mediante una expresión distinta en cada uno de ellos.

Para obtener su derivada por una parte se calcula la derivada separadamente en cada uno de los trozos y por otra se estudian los puntos donde se unen los intervalos entre sí.

La derivada de las expresiones que definen la función en cada uno de los trozos se obtiene aplicando las reglas del cálculo de derivadas descritas anteriormente.

El estudio de los puntos de unión de los intervalos es más delicado y en general requiere aplicar la definición de derivada. Es decir, formar el cociente incremental y calcular el límite correspondiente. Cuando la función esté definida mediante expresiones diferentes a cada lado del punto en cuestión el cálculo de dicho límite ha de hacerse por la derecha e izquierda de forma separada lo que conducirá a las derivadas por la derecha e izquierda respectivamente.

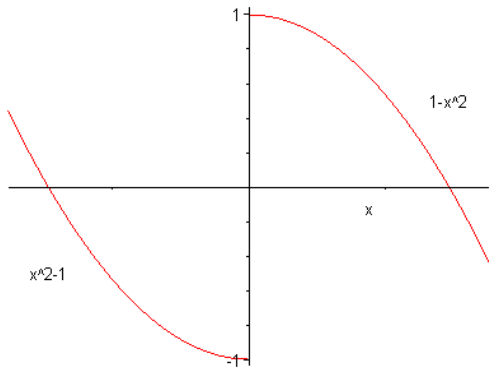
El lector debe observar que esto no es lo mismo que calcular las derivadas de las expresiones que definen la función a cada uno de los lados y evaluarlas en el punto de unión. Este procedimiento no es válido siempre como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 37 (Razonamiento incorrecto) *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 & si\ x < 0 \end{cases}.$$

1. *Para $x \geq 0$ se tiene $f'(x) = -2x$. Por tanto, $f'(0+) = 0$.*
2. *Para $x < 0$ se tiene $f'(x) = 2x$. Por tanto, $f'(0-) = 0$.*
3. *$f'(0+) = f'(0-) = 0$.*
4. *Conclusión, f es diferenciable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.*

La conclusión es falsa ya que f no es continua en $x = 0$ por lo que tampoco puede ser diferenciable.



A la misma conclusión habríamos llegado aplicando directamente la definición de derivada por la izquierda. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(c-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h^2-1)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2-2}{h} \end{aligned}$$

y dicho límite no existe al tender el numerador a -2 y el denominador a 0. ■

El siguiente teorema explica en qué condiciones el razonamiento anterior es correcto.

Teorema 38 *Sea f una función definida en un intervalo (a,b) y $c \in (a,b)$. Probar que si g es diferenciable en (a,b) y $f(x) = g(x)$ para todo $c \leq x < b$ se verifica $f'(c+) = g'(c)$. Análogamente si h es diferenciable en (a,b) y $f(x) = h(x)$ para todo $a < x \leq c$ se verifica $f'(c-) = h'(c)$.*

Dem.: Puesto que f coincide con g en $c \leq x < b$ y g es diferenciable en c, la derivada por la derecha en c es

$$\begin{aligned} f'(c+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \\ &= g'(c+) \\ &= g(c). \end{aligned}$$

La otra afirmación se comprueba de forma análoga. ■

Obsérvese que en el ejemplo anterior el teorema es aplicable para calcular la derivada por la derecha por lo que la primera afirmación es correcta. En cambio, no es aplicable para calcular la derivada por la izquierda ya que en este caso la función $f(x)$ y la función $h(x) = x^2 - 1$ no coinciden en $x = 0$

$$f(0) = 1 - 0^2 = 1$$

y

$$h(0) = 0^2 - 1 = -1.$$