

Funciones Vectoriales y Curvas

June Amillo

20/04/2000

Contenido

1	Funciones Vectoriales	2
1.1	Introducción	2
1.2	Límite de una Función Vectorial	3
1.3	Derivada de una Función Vectorial	4
1.4	Reglas de Derivación	5
1.5	Longitud de un Arco de Curva	6
1.6	Area de una Superficie de Revolución	7
1.6.1	Giro Alrededor del Eje OX	7
1.6.2	Giro Alrededor del Eje OY	8
2	Coordenadas Polares	8
2.1	Definición	8
2.2	Relación entre Coordenadas Cartesianas y Polares	9
2.3	Curvas en Coordenadas Polares	10
2.4	Area en Polares de una Región Plana	10
2.5	Longitud de una Curva en Coordenadas Polares	11
3	Coordenadas Cilíndricas y Esféricas	11
3.1	Coordenadas Cilíndricas	12
3.2	Coordenadas Esféricas	12

1 Funciones Vectoriales

1.1 Introducción

Consideremos una partícula en movimiento sobre un plano. Su posición en un determinado instante t viene determinada por dos coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ que dependen de t . Si la partícula se mueve en el espacio su posición queda determinada por tres coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ dependientes de t . En el primer caso la posición de la partícula se describe mediante un vector de dimensión dos cuyas componentes dependen de t y en el segundo caso mediante un vector de tres coordenadas cuyas componentes son función de t . Esto nos lleva a considerar un tipo nuevo de funciones.

Definición 1 Sea $m \geq 1$ entero. Se llama **función vectorial** de m componentes a toda función cuyo dominio es un subconjunto de números reales y su recorrido un subconjunto del espacio euclídeo m dimensional.

Las funciones vectoriales son funciones que a cada número real o escalar t perteneciente a su dominio asocian un vector $\mathbf{r}(t)$. Las funciones con valores reales hasta ahora estudiadas se llaman *funciones escalares* cuando necesitamos distinguirlas de las funciones vectoriales. Las componentes del vector $\mathbf{r}(t)$ son funciones escalares y se escribe

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)).$$

En el caso $m = 2$ es habitual escribir

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

y para $m = 3$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Si \mathbf{r} es una función vectorial de dos componentes y su dominio un intervalo I , al variar t el extremo del vector $\mathbf{r}(t)$ describe una curva en el plano. Se dice que las ecuaciones

$$x = x(t) , y = y(t) , t \in I$$

constituyen una *parametrización* de dicha curva. En este caso la variable real t se llama *parámetro*. A veces es fácil eliminar el parámetro t entre ambas ecuaciones para obtener ecuaciones explícitas o implícitas de la curva.

De la misma forma si \mathbf{r} es una función vectorial de tres componentes el extremo del vector $\mathbf{r}(t)$ describe una curva en el espacio ordinario. Todas estas curvas pueden ser dibujadas fácilmente con la ayuda de una computadora.

1.2 Límite de una Función Vectorial

El límite de una función vectorial se define en términos de los límites de las funciones componentes.

Definición 2 Sea $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ una función vectorial, a un escalar y $\mathbf{l} = [l_1, \dots, l_m]$ un vector. Se dice que \mathbf{l} es **límite** de \mathbf{r} cuando t tiende hacia a y se escribe

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{l}$$

si y sólo si para cada $i = 1, \dots, m$ se verifica

$$\lim_{t \rightarrow a} x_i(t) = l_i.$$

La continuidad de una función vectorial se define de la misma manera que en el caso de una función escalar.

Definición 3 Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial. Se dice que \mathbf{r} es **continua** en a si y sólo si se verifica

1. \mathbf{r} está definida en a ,
2. existe límite de \mathbf{r} cuando t tiende hacia a , y
3. $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

1.3 Derivada de una Función Vectorial

Como en el caso escalar la derivada trata de cuantificar la razón de cambio instantánea del valor de la función, en este caso un vector.

Definición 4 Sea \mathbf{r} una función vectorial cuyo dominio sea un intervalo I . La **derivada** de \mathbf{r} en $t \in I$ es el vector

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso se dice que \mathbf{r} es **diferenciable** en t .

Cuando t sea un extremo del intervalo I el límite anterior se interpretará como el límite lateral adecuado.

Sea $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, es inmediato probar que \mathbf{r} diferenciable en t si y solo sí cada x_i , $i = 1, \dots, m$, es diferenciable en t . En este caso se verifica

$$\mathbf{r}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_m(t)).$$

Si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ el vector $\mathbf{r}'(t)$ se llama *vector tangente* a la curva descrita por $\mathbf{r}(t)$. Si dicha curva es interpretada como la posición de una partícula en movimiento el vector $\mathbf{r}'(t)$ se denomina *vector velocidad*. Este vector apunta en la dirección del movimiento y su longitud o norma señala su rapidez. La derivada del vector velocidad, i.e. $\mathbf{r}''(t)$, se denomina *vector aceleración*.

Como en el caso escalar la *diferencial* de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ se define mediante la ecuación

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt.$$

La diferencia es que ahora $d\mathbf{r}$ es un vector. Para pequeños incrementos $\Delta t = dt$ del parámetro t , el vector diferencial $d\mathbf{r}$ es aproximadamente igual al incremento de \mathbf{r} correspondiente, es decir

$$d\mathbf{r} \approx \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

1.4 Reglas de Derivación

Las reglas de derivación son paralelas a las del caso real. En concreto la de la suma y de la cadena son formalmente idénticas. En la del producto, éste se ha de considerar como el producto escalar de dos vectores. La del cociente no tiene sentido para funciones vectoriales al no estar definido el cociente de vectores. Estas reglas en forma abreviada son:

Teorema 5 *Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son funciones diferenciables y a un escalar, entonces*

1. *Derivada de la suma*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'.$$

2. *Derivada del producto por escalar*

$$(a\mathbf{u})' = a(\mathbf{u})'.$$

3. *Derivada del producto escalar de vectores*

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'.$$

4. *Regla de cadena. Si \mathbf{r} es función vectorial diferenciable de t y t es a su vez una función escalar de s diferenciable, entonces*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

Como en el caso escalar la derivada de una función vectorial constante, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{k}$, es el vector $\mathbf{0}$. En este caso no existe movimiento, la curva descrita se reduce al extremo del vector \mathbf{k} . No ocurre lo mismo si la función $\mathbf{r}(t)$ es de longitud constante, es decir $\|\mathbf{r}(t)\| = k$. En este caso se tiene

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = k^2$$

y derivando resulta

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

Es decir \mathbf{r}' es ortogonal a \mathbf{r} pero no necesariamente cero. Ahora tenemos movimiento, si bien éste se da sobre la esfera de radio k .

1.5 Longitud de un Arco de Curva

Supongamos un arco de curva del plano descrito por una función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, cuyas componentes sean diferenciables y posean derivadas continuas. Supongamos además que dicho arco no pasa dos veces por el mismo punto. Para pequeñas variaciones Δt del parámetro t , el incremento Δs en la longitud del arco de curva satisface

$$\Delta s \approx \|\Delta \mathbf{r}\| \approx \|\mathbf{r}'(t)\| \Delta t.$$

Puesto que,

$$\|\Delta \mathbf{r}\| \approx \|\mathbf{r}'(t)\| \Delta t$$

y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

resulta

$$\Delta s \approx \|\mathbf{r}'(t)\| \Delta t = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \Delta t.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 6 Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función vectorial inyectiva definida en $I = [a, b]$, derivable y con derivada continua en I . Se llama **longitud** del arco de curva correspondiente a \mathbf{r} al número

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

En el caso de una curva del plano descrita por una ecuación explícita $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ésta puede ser parametrizada por las ecuaciones

$$x = t, y = f(t), a \leq t \leq b.$$

Si f es diferenciable y posee derivada continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ la longitud del arco de curva es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

En el espacio de tres dimensiones la longitud de un arco de curva está definida por la fórmula

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

1.6 Area de una Superficie de Revolución

1.6.1 Giro Alrededor del Eje OX

Supongamos un arco de curva en el plano descrito por una función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, cuyas componentes sean diferenciables y posean derivadas continuas. Supongamos además que dicho arco no pasa dos veces por el mismo punto y que todo él está situado en el semiplano $y > 0$. Al girar dicho arco alrededor del eje x se obtiene una superficie de revolución. Para pequeñas variaciones Δt del parámetro t , el incremento ΔS del área de dicha superficie de revolución satisface

$$\Delta S \approx 2\pi y \Delta s$$

siendo Δs el incremento en la longitud del arco de curva. Puesto que,

$$\Delta s \approx \|\Delta \mathbf{r}\| \approx \|\mathbf{r}'(t)\| \Delta t$$

y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

resulta

$$\Delta S \approx 2\pi y \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \Delta t.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 7 Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función vectorial inyectiva definida en $I = [a, b]$, tal que $y(t) > 0$ para todo $t \in I$ y cuyas componentes son derivables y con derivada continua en I . Se llama **área** de la superficie de revolución engendrada al girar el arco de curva correspondiente a \mathbf{r} alrededor del eje x al número

$$S = \int_a^b 2\pi y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

En el caso de una curva del plano descrita por una ecuación explícita $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ésta puede ser parametrizada por las ecuaciones

$$x = x, y = f(x), a \leq x \leq b.$$

Si f es positiva, diferenciable y posee derivada continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ el área de la superficie de revolución engendrada al girar el arco de curva correspondiente alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

1.6.2 Giro Alrededor del Eje OY

Supongamos un arco de curva en el plano descrito por una función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, tal que no pase dos veces por el mismo punto y que todo él esté situado en el semiplano $x > 0$. Al girar dicho arco sobre alrededor del eje y se obtiene una superficie de revolución. La construcción de una integral que defina el área de la superficie resultante es análoga al caso de giro alrededor del eje x .

Definición 8 Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función vectorial inyectiva definida en $I = [a, b]$, tal que $x(t) > 0$ para todo $t \in I$ y cuyas componentes son derivables y con derivada continua en I . Se llama **área** de la superficie de revolución engendrada al girar el arco de curva correspondiente a \mathbf{r} alrededor del eje y al número

$$S = \int_a^b 2\pi x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

2 Coordenadas Polares

En esta sección describiremos otros sistemas de coordenadas para representar los puntos del plano y del espacio de tres dimensiones distintos del sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.

2.1 Definición

Las coordenadas cartesianas describen un punto como la intersección de dos rectas, una vertical y otra horizontal. Los puntos del plano pueden también ser descritos como la intersección de un círculo y de una semirrecta que parte del centro de dicho círculo.

Fijemos un punto O del plano que llamaremos *polo* y una semirrecta inicial con origen en dicho punto que llamaremos *eje polar*. Midamos ángulos

positivos θ en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y ángulos negativos en el sentido de las mismas. Sea r un número. El par (r, θ) se dice que son las *coordenadas polares* del punto P del plano determinado de la siguiente manera:

1. Si r es positivo, P es la intersección del círculo de radio r centrado en el polo y la semirrecta que partiendo del polo forma un ángulo θ con el eje polar.
2. Si r es negativo, P es la intersección del círculo de radio $-r$ centrado en el polo y la semirrecta que partiendo del polo forma un ángulo $\theta + \pi$ con el eje polar.
3. Si r es cero, P representa al polo independientemente de θ .

En coordenadas cartesianas cada punto del plano está representado por un único par de coordenadas. En coordenadas polares un punto admite diferentes representaciones. Los pares (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ siempre representan el mismo punto. Así mismo si (r, θ) representa a un punto P , también representan el mismo punto los pares $(r, \theta + 2k\pi)$, k entero. El polo admite como coordenadas polares todo par de la forma $(0, \theta)$, con θ arbitrario.

2.2 Relación entre Coordenadas Cartesianas y Polares

Si hacemos coincidir el polo con el origen del sistema de coordenadas cartesianas y el eje polar con el eje x positivo, las siguientes ecuaciones permiten relacionar las coordenadas cartesianas de P con sus coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Estas ecuaciones se satisfacen cualquiera que sea el signo de r . Si r es positivo,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y si $-\pi/2 < \theta < \pi/2$,

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

2.3 Curvas en Coordenadas Polares

Las curvas en coordenadas polares están representadas por una ecuación relacionando r y θ . Por ejemplo, la ecuación $r = k$ representa una circunferencia de radio k centrada en el origen. Por otra parte la ecuación $\theta = k$ representa una recta que pasa por el polo.

La forma más común de representar una curva en coordenadas polares es mediante una ecuación del tipo

$$r = f(\theta).$$

También es posible expresar el radio r y el ángulo θ como funciones de un parámetro t ,

$$r = r(t), \theta = \theta(t).$$

Para trazar una curva en coordenadas polares se procede como en el caso de coordenadas rectangulares. Se identifican un número adecuado de pares (r, θ) y se unen entre sí mediante segmentos rectilíneos. Las computadoras permiten realizar estos gráficos pintando la curva en coordenadas rectangulares de ecuaciones paramétricas

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y = r(t) \sin \theta(t).$$

2.4 Area en Polares de una Región Plana

Sea $f(\theta)$ una función continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, con $\beta \leq \alpha + 2\pi$. Sea P el punto de coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$. Al variar θ entre α y β el punto P recorre la curva $r = f(\theta)$. Para determinar el área A barrida por el radio OP podemos proceder de la siguiente manera.

Primeramente dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos mediante la partición

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta.$$

A continuación para cada i aproximamos el área de la región barrida por P al variar θ entre θ_{i-1} y θ_i por el área de un sector circular de radio $f(c_i)$ con $\theta_{i-1} \leq c_i \leq \theta_i$. De esta forma se tiene,

$$A \approx \sum_1^n \frac{f(c_i)^2}{2} \Delta\theta_i$$

lo que sugiere la siguiente definición.

Definición 9 Sea $f(\theta)$ una función continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, con $\beta \leq \alpha + 2\pi$. El **área en coordenadas polares** limitada por la región $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta.$$

2.5 Longitud de una Curva en Coordenadas Polares

Sea una curva definida en coordenadas polares mediante una ecuación de la forma $r = f(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Dicha curva puede describirse en ecuaciones paramétricas mediante las ecuaciones

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta.$$

La longitud en coordenadas paramétricas es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} d\theta.$$

Derivando x e y con respecto al parámetro se tiene

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta) \\ y'(\theta) &= f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Finalmente, substituyendo en L y simplificando resulta la siguiente fórmula para el cálculo de la longitud de una curva en coordenadas polares

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

3 Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

En el espacio un punto puede ser representado por un sistema de tres coordenadas cartesianas (x, y, z) . Introducimos a continuación dos formas alternativas de representar estos puntos. Como en el caso de coordenadas polares hay situaciones especiales cuyo estudio se simplifica utilizando estos sistemas. Las coordenadas cilíndricas están especialmente indicadas para situaciones que implican cilindros o simetría respecto de un eje de giro. Las coordenadas esféricas en aquellas otras en las que aparecen esferas o conos, o en general presentan simetría espacial respecto del origen.

3.1 Coordenadas Cilíndricas

Sea P un punto del espacio. Sean (r, θ) las coordenadas polares de la proyección del punto P sobre el plano xy y z la distancia dirigida desde P a dicho plano. La terna (r, θ, z) se llama *coordenadas cilíndricas* del punto P .

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas cilíndricas y las cartesianas son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

La ecuación $r = k$, $k > 0$, representa un cilindro de radio k . La ecuación $\theta = k$ representa un plano que contiene al eje z y la ecuación $z = k$ un plano paralelo al plano xy .

Las ecuaciones

$$r = k, \quad z = f(\theta)$$

representan una curva contenida en una superficie cilíndrica de radio k .

3.2 Coordenadas Esféricas

Sea P un punto del espacio. Sea ρ la distancia de P al origen O , θ el mismo ángulo que en coordenadas cilíndricas y ϕ el ángulo formado por el segmento OP y el eje z . La terna (ρ, θ, ϕ) se llama *coordenadas esféricas* del punto P . Se considera ρ positiva y ϕ no orientado.

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas y las cartesianas son

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

junto con

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

La ecuación $\rho = k$, $k > 0$, representa una esfera de radio k . La ecuación $\theta = k$ representa un plano que contiene al eje z y la ecuación $\phi = k$ un semicono con vértice en el origen O y eje z .

Las ecuaciones

$$\rho = k, \quad \phi = f(\theta)$$

representan una curva contenida en una superficie esférica de radio k .