

CALCULO 11-M
Examen Final Junio 2002
Duración 3h

27 de Junio de 2002

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1 (4 puntos) *Analizar la gráfica de la función $y = 3x^{2/3} - x^2$.*

Solución:

Dominio Tratándose de una raíz cúbica la función está definida para todo x siendo su dominio toda la recta.

Simetrías Puesto que,

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^{2/3} - (-x)^2 \\ &= 3\sqrt[3]{(-x)^2} - (-x)^2 \\ &= 3\sqrt[3]{x^2} - x^2 \\ &= 3x^{2/3} - x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

la función es par y su gráfica simétrica respecto del eje OY .

Cortes con los ejes Para $x = 0$ se tiene $y = 0$. Por otra parte, $y = 0$ implica

$$3x^{2/3} - x^2 = 0$$

o sea

$$27x^2 = x^6$$

de donde se sigue $x = 0$ o $x = \pm\sqrt[4]{27}$.

Continuidad y asíntotas La función es continua para todo x , no tiene asíntotas verticales. En el infinito se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^{2/3} - x^2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3}(3 - x^{4/3}) \\ &= (+\infty)(-\infty) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Por simetría,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^{2/3} - x^2) = -\infty.$$

Derivada Para todo $x \neq 0$ la función es derivable y se tiene

$$y' = 2x^{-1/3} - 2x.$$

Para $x = 0$ aplicando la definición de derivada resulta

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^{2/3} - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{h^{1/3}} - h \right) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Mientras que,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h^{2/3} - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{h^{1/3}} - h \right) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Por lo que no existe derivada en $x = 0$ presentándose un punto cúspide para dicho valor.

Puntos críticos Los puntos críticos son los puntos donde no hay derivada o donde la derivada se anula. La ecuación

$$y' = 2x^{-1/3} - 2x = 0$$

implica

$$x^{-1/3}(1 - x^{4/3}) = 0$$

de donde se sigue $x = \pm 1$. Resumiendo los puntos críticos son $(-1, 2)$, $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos Estudio de los signos de la derivada y del crecimiento o decrecimiento

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$x^{-1/3}$	-	-	+	+
$1 - x^{4/3}$	-	+	+	-
y'	+	-	+	-
y	↑	↓	↑	↓

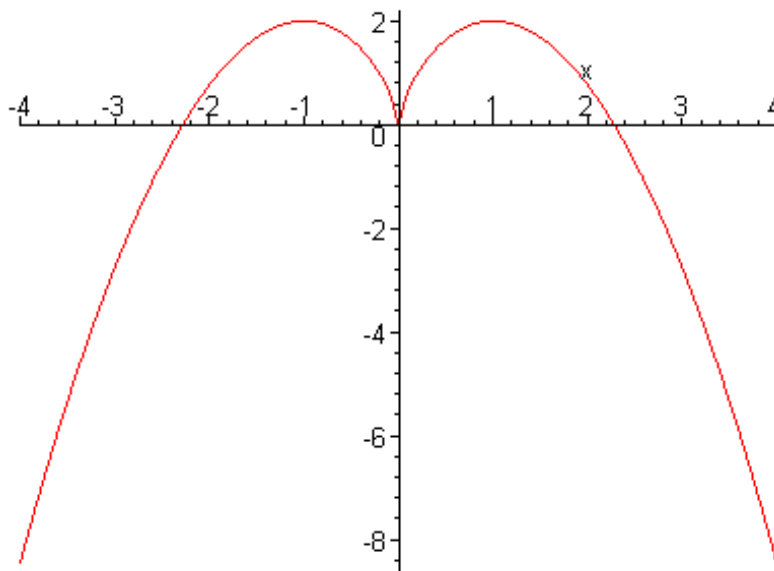
existiendo máximos en $(\pm 1, 2)$ y mínimo en $(0, 0)$.

Concavidad, convexidad Para todo $x \neq 0$ la derivada segunda es

$$y'' = -\frac{2}{3}x^{-4/3} - 2 < 0$$

por lo que la función es siempre cóncava hacia abajo.

Gráfica



Ejercicio 2 (3 puntos)

1. Obtener un desarrollo en fracciones simples de la expresión

$$\frac{x^4 - x^2 - x - 1}{x(x^2 + 1)^2}.$$

2. *Evaluar la integral indefinida de la expresión anterior.*
3. *Determinar una función $f(x)$ cuya derivada coincide con la expresión del primer apartado y que satisface $f(1) = 1$.*

Solución:

1. El desarrollo será de la forma

$$\frac{x^4 - x^2 - x - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Reduciendo a común denominador el segundo miembro e igualando los numeradores se obtiene

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - x - 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= (B + A)x^4 + Cx^3 + (2A + D + B)x^2 + (E + C)x + A. \end{aligned}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B + A &= 1 \\ C &= 0 \\ 2A + D + B &= -1 \\ E + C &= -1 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$A = -1, B = 2, C = 0, D = -1, E = -1.$$

Por tanto el desarrollo en fracciones simples es

$$\frac{x^4 - x^2 - x - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

2. Por la linealidad de integración

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^2 - x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= -I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Las dos primeras integrales son inmediatas

$$I_1 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$I_2 = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + C$$

Para calcular I_3 descomponemos, resultando

$$\begin{aligned} I_3 = \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

La primera vuelve a ser inmediata

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

La segunda requiere un cambio de variable

$$\begin{aligned}
 I_{32} &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} x = \tan u \\ dx = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right\} \\
 &= \int \frac{1}{(\tan^2 u + 1)^2} \frac{du}{\cos^2 u} \\
 &= \int \cos^2 u \, du \\
 &= \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du \\
 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C \\
 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \sin u \cos u + C \\
 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos^2 u} \cos u + C \\
 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \frac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u}} + C \\
 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \frac{\tan u}{1 + \tan^2 u} + C \\
 &= \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C
 \end{aligned}$$

Reuniendo todas las integrales y simplificando resulta

$$\int \frac{x^4 - x^2 - x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{1 - x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

3. Las funciones cuya derivada es la expresión racional del enunciado son sus primitivas, es decir

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{1 - x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

La primitiva que satisface $f(1) = 1$ se obtiene mediante la condición

$$1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} + C$$

por lo que

$$C = 1 - \ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

y

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{1-x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \arctan x + 1 - \ln 2 + \frac{\pi}{8}.$$

Ejercicio 3 (3 puntos) *Calcular el volumen del sólido cuya base está limitada por las gráficas de $y = x + 1$ e $y = x^2 - 1$ y cuyas secciones perpendiculares al eje OX son semicírculos cuyo diámetro se apoya en dichas gráficas.*

Solución:

Sean $y_1 = x + 1$ e $y_2 = x^2 - 1$. Los puntos de intersección se producen en

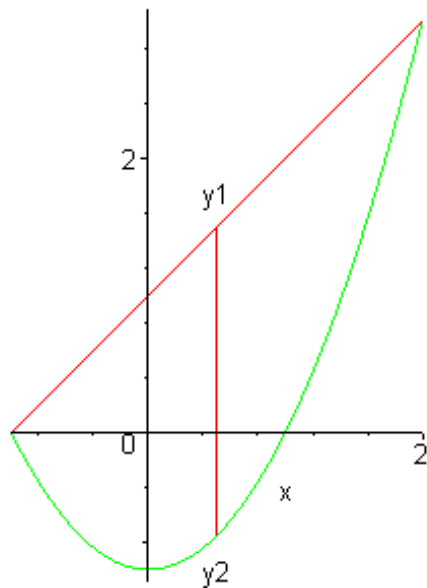
$$x + 1 = x^2 - 1$$

es decir en las soluciones de la ecuación

$$x^2 - x - 2 = 0$$

que son

$$x = -1, x = 2.$$



El diámetro de los semicírculos que se apoyan en las dos gráficas perpendicularmente al eje OX será

$$d = y_1 - y_2 = (x + 1) - (x^2 - 1) = 2 + x - x^2$$

y el área de las secciones

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(2 + x - x^2)^2.$$

En consecuencia el volumen del sólido solicitado es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^2 A(x) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_{-1}^2 (2 + x - x^2)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_{-1}^2 (4 + 4x - 3x^2 - 2x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \left[4x + 2x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{81\pi}{80}. \end{aligned}$$

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4 (4 puntos)

1. A partir del desarrollo de McLaurin para la función $\cos x$ obtenga un desarrollo de McLaurin para $\cos 2x$.
2. A partir de éste obtenga un desarrollo para

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

3. Estime la integral

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

utilizando los tres primeros términos distintos de cero de la serie anterior.

4. Indique una cota del error cometido en dicha estimación.

Solución:

1. El desarrollo de McLaurin de la función coseno es

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

siendo válido en $-\infty < x < +\infty$. Reemplazando x por $2x$ resulta

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + \dots \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + \dots + (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \dots \end{aligned}$$

válido también en $-\infty < x < +\infty$.

2. Puesto que

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

resulta

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + \dots + (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} + \dots \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2(k-1)} + \dots$$

en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

3. Usando los tres primeros términos del desarrollo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx &\simeq \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 \right) dx \\ &= x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{45} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{9} + \frac{2}{225} \\ &= \frac{202}{225}. \end{aligned}$$

4. Por tratarse de una serie alternada el error cometido en la aproximación anterior es menor que el valor absoluto de primer término que se desprecia, por tanto

$$E \leq \int_0^1 \frac{2^7}{8!} x^6 dx = \frac{1}{7} \frac{2^7}{8!} = \frac{1}{2205}.$$

Ejercicio 5 (3 puntos)

1. Determinar la ecuación de la normal a la superficie

$$xy + xz + yz = 3$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

2. Determinar el área de la superficie de revolución obtenida al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = \sqrt{2x}$, $0 \leq x \leq 4$.
3. Determinar un vector tangente a la curva intersección de las superficies de los apartados 1 y 2.

Solución:

1. Un vector normal a la superficie es el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz - 3.$$

Dicho gradiente es

$$\nabla f = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$

En particular en el punto $(1, 1, 1)$

$$\nabla f(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

De esta forma, la recta normal será

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{2}$$

es decir la bisectriz

$$x = y = z.$$

Por otra parte el plano tangente será

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

es decir

$$x + y + z - 3 = 0.$$

2. Parametrizando la curva en la forma $x = t, y = \sqrt{2t}$ el área de la superficie engendrada al girar dicha curva alrededor del eje OX para $0 \leq x \leq 4$ es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 y \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2t} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2t + 1} dt \\ &= 2\pi \frac{(2t + 1)^{3/2}}{3/2} \frac{1}{2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{52\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. La ecuación de la superficie obtenida al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX es

$$y^2 + z^2 = f(x)^2.$$

En particular, para $y = \sqrt{2x}$ resulta la superficie

$$y^2 + z^2 = 2x.$$

Es evidente que dicha superficie contiene al punto $(1, 1, 1)$. Definiendo,

$$g(x, y, z) = 2x - y^2 - z^2$$

un vector normal a la superficie anterior es

$$\nabla g = 2x \mathbf{i} - 2y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}.$$

En particular en el punto $(1, 1, 1)$

$$\nabla g(1, 1, 1) = 2 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}.$$

Un vector tangente a la curva intersección de las superficies $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 1, 1)$ será el producto vectorial de los vectores normales a cada una de las superficies en dicho punto, es decir

$$\nabla f(1, 1, 1) \times \nabla g(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Ejercicio 6 (3 puntos) *Determinar los máximos y mínimos de*

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$$

en la región limitada por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 6)$.

Solución:

Se trata de determinar el máximo y mínimo absoluto de una función continua en un conjunto cerrado y acotado.

En primer lugar estudiaremos los puntos críticos de f pertenecientes al interior del triángulo. Puesto que la función es diferenciable estos puntos serán solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x &= 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \\ f_y &= 8xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0. \end{aligned}$$

Extrayendo factor común en cada ecuación resulta

$$\begin{aligned} y^2(4 - 2x - y) &= 0 \\ xy(8 - 2x - 3y) &= 0. \end{aligned}$$

En el interior del triángulo tanto x como y han de ser distintos de cero por tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x = 1, \quad y = 2.$$

Como la frontera se compone de tres segmentos analizaremos cada uno de ellos por separado.

Segmento $y = -x + 6$, $0 \leq x \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$\begin{aligned} F_3(x) &= 4x(6-x)^2 - x^2(6-x)^2 - x(6-x)^3 \\ &= -72x + 24x^2 - 2x^3. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de esta función han de satisfacer la ecuación

$$F_3'(x) = -72 + 48x - 6x^2 = 0$$

por lo que son las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

o sea

$$x = 2 \text{ y } x = 6.$$

Segmento $y = 0$, $0 \leq x \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$F_1(x) = 0.$$

Segmento $x = 0$, $0 \leq y \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$F_2(y) = 0.$$

Agrupando los candidatos y los valores de f correspondientes resulta la siguiente tabla

x	y	$f(x, y)$
1	2	4
2	4	-64
$0 \leq x \leq 6$	0	0
0	$0 \leq y \leq 6$	0

Por tanto el mínimo absoluto de f es -64 y el máximo absoluto es 4.