SOLUCIONES DEL EXAMEN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO (1/9/2011)

PROBLEMA 1. (2,5 ptos) Resuelva la ecuación diferencial

$$xy' + y = 2xy^2 \ln x$$

SOLUCIÓN:

Operando, se tiene, sin pérdida de soluciones:

$$y' + \frac{1}{x} y = (2 \cdot \ln x) \cdot y^2, \qquad (1)$$

donde se observa, claramente, que es una ecuación de tipo Bernoulli con $n=2$.

La función constante $y(x)=0 \ \forall x>0$ (para otros valores de x la ecuación no tiene sentido) es una solución particular, y si $y \neq 0$, podemos dividir por y^2, y así preparar la ecuación para el cambio de variable:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = 2 \cdot \ln x \qquad (2)$$

$$\text{c.v.} \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{y} \\ z' = -\dfrac{y'}{y^2} \end{cases}$$

Sustituyendo el c.v. en (2), se obtiene:

$$-z' + \frac{1}{x} z = 2 \ln x \qquad (3)$$

que es una ecuación lineal completa. Resolvemos la homogénea asociada:

$$z' - \frac{1}{x} z = 0 \implies \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} & \text{si } z \neq 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

entonces su solución general es $z = Kx$, $K \in \mathbb{R}$.

Ahora resolvemos (3) por variación de las constantes: suponemos que su solución general viene dada por

$$z = k(x) \cdot x$$

Derivando: $z' = k'(x) \cdot x + k(x)$

y sustituyendo en (3):

$$-\left(k'(x) \cdot x + k(x)\right) + \frac{1}{x} k(x) \cdot x = 2 \cdot \ln x$$

y operando resulta

$$k'(x) = -\frac{2 \ln x}{x} \Rightarrow k(x) = -\int \frac{2 \ln x}{x} dx =$$

$$= -\ln^2 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, la solución general de (3) es

$$z = \left(c - \ln^2 x\right) x, \quad c \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el c.v. y añadiendo la solución nula perdida en el c.v. se obtiene la solución de la ecuación dada:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{(c - \ln^2 x) x}, & c \in \mathbb{R}, \text{ con } x > 0 \\ \\ y = 0, & \text{con } x > 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 2.– (2,5 ptos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con condiciones iniciales, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = a^2 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Se trata de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a^2$$

así,

$$P(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 0, \text{ raíz doble, si } a = 0 \\ \lambda = \pm a i, \text{ raíces simples complejas, si } a \neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{CASO } a=0}$ Se puede obtener la base fundamental teniendo en cuenta la raíz doble obtenida o bien, dado que la ecuación se reduce a $y''=0$, integrando dos veces se tiene: que

$$y = C_1 + C_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general. Aplicamos las condiciones iniciales:

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 \implies C_1 = 1$$

$$1 = y(1) = 1 + C_2 \cdot 1 \implies C_2 = 2$$

Por tanto, la solución es $\boxed{y = 1}$

$\boxed{\text{CASO } a \neq 0}$

Una base fundamental es $\{\cos(ax), \operatorname{sen}(ax)\}$, por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_H = C_1 \cos(ax) + C_2 \operatorname{sen}(ax), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Es claro que $y_p = 1$ es una solución particular de la completa (en todo caso, basta aplicar el método de similitud que asegura la existencia de solución de la forma $y = k$), y en consecuencia, la solución general de la ecuación es:

$$y = y_p + y_H = 1 + C_1 \cos(ax) + C_2 \operatorname{sen}(ax), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Aplicamos las condiciones iniciales:

$$1 = y(0) = 1 + C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$1 = y(1) = 1 + C_2 \operatorname{sen} a \iff C_2 \cdot \operatorname{sen} a = 0$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{sen} a = 0 \\ \text{ó} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Dado que $\operatorname{sen} a = 0 \iff a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ \qquad y = 1 + C_2 \operatorname{sen}(k\pi x), \quad C_2 \in \mathbb{R} \\ \\ \text{Si } a \neq k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ \qquad y = 1 \end{array}}$$

PROBLEMA 3.-

(A) (1 pto) Halle la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{si } 3 < t \end{cases}$$

SOLUCIÓN Utilizando la función de Heaviside podemos escribir:

$$f(t) = t \cdot (h(t) - h(t-2)) + 2 \cdot (h(t-2) - h(t-3))$$
$$= t \cdot h(t) - (t-2)\, h(t-2) - 2h(t-3)$$

Entonces, teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Laplace, se obtiene:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t \cdot h(t)) - \mathcal{L}((t-2) \cdot h(t-2)) - 2\mathcal{L}(h(t-3))$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2}$$

(B) (1,5 ptos) Mediante la transformada de Laplace, encuentre la función que es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = 6e^t$$

y que cumple que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 3$.

SOLUCIÓN: Apliquemos la transformada de Laplace a la ecuación dada:

$$\mathcal{L}(y'' - 2y' - 3y) = \mathcal{L}(6e^t)$$

y por la linealidad de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = 6\mathcal{L}(e^t).$$

Llamemos $F = \mathcal{L}(y)$ y tengamos en cuenta las propiedades de $\mathcal{L}$:

$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-2\big(sF(s)-y(0)\big)-3F(s)=\frac{6}{s-1}$$

$$F(s)\,(s^2-2s-3)-s-3+2=\frac{6}{s-1}$$

$$F(s)=\left(\frac{6}{s-1}+s+1\right)\frac{1}{s^2-2s-3}=\left(\frac{6}{s-1}+s+1\right)\frac{1}{(s+1)(s-3)}$$

$$=\frac{6}{(s-1)(s+1)(s-3)}+\frac{1}{s-3}$$

Entonces

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s-1)(s+1)(s-3)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

Para hallar la transformada inversa del primer sumando, descomponemos en fracciones simples la función racional:

$$\frac{6}{(s-1)(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}$$

Sumando las fracciones de la derecha e igualando el numerador obtenido al de la izquierda:

$$6=A(s+1)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s+1)$$

Si $s=1\Rightarrow 6=A\cdot 2\cdot(-2)\Rightarrow A=-3/2$

Si $s=-1\Rightarrow 6=B(-2)(-4)\Rightarrow B=3/4$

Si $s=3\Rightarrow 6=C\cdot 2\cdot 4\Rightarrow C=3/4$

En consecuencia:

$$y(t)=-\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\left(\frac{3}{4}+1\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}e^{t}+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{3t},\quad \text{con } t\geq 0.$$

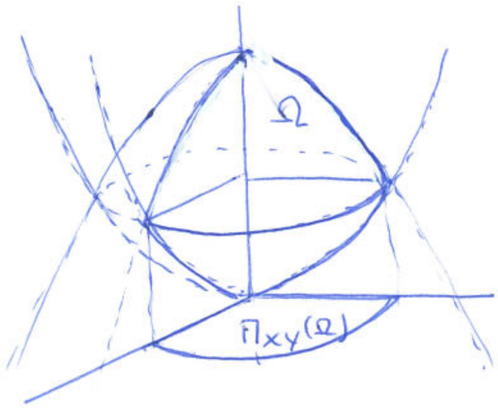
PROBLEMA 4.- (2,5 ptos) Calcula $\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω el recinto acotado en el primer octante entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el paraboloide $z=2-(x^2+y^2)$

En primer lugar, hallemos la intersección de los dos paraboloides:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2-(x^2+y^2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=x^2+y^2 \\ z=1\end{cases}$$

entonces la proyección del sólido en el plano xy es

$$\Pi_{xy}(\Omega)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$



Como $x^2+y^2\le 2-(x^2+y^2)$ $\forall (x,y)\in\Pi_{xy}(\Omega)$, es decir, el paraboloide de ecuación $z=2-(x^2+y^2)$ queda por encima del paraboloide $z=x^2+y^2$ en $\Pi_{xy}(\Omega)$, entonces

$$I=\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz=\iint_{\Pi_{xy}(\Omega)} xy\,dx\,dy\int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)}dz$$

$$=\iint_{\Pi_{xy}(\Omega)} xy\left([z]_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_{\Pi_{xy}(\Omega)} xy\,(2-2(x^2+y^2))\,dx\,dy$$

Para resolver esta integral doble podemos hacer el cambio de variable a coordenadas polares:

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad J_\varphi = \rho$$

con lo que quedaría:

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho\cos\theta \, \rho \operatorname{sen}\theta \, 2(1-\rho^2) \cdot \rho \, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^1 2\,(\rho^3 - \rho^5)\, d\rho =$$

$$= \left(\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(2 \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \boxed{\frac{1}{12}}$$