

2º Examen parcial de Análisis Matemático.

1 de febrero de 2010

Problema 1. (4 puntos)

(a) (2 puntos)

Hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

1. $p(t) = \int_0^t \operatorname{sen} u \cos(t-u) du$ 2. $q(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t.$

3. $r(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ -t+6 & \text{si } 3 < t \leq 6 \\ 0 & \text{si } t > 6 \end{cases}$

Hallar la transformada inversa de Laplace de la función $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$.(b) (2 puntos) Resolver la ecuación diferencial $x'' + x = r(t)$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -2$, siendo $r(t)$ la función del apartado anterior.**Problema 2. (3 puntos)** Calcular la integral doble

$$\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

siendo R el recinto bidimensional del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones:

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 3 \quad y = x \quad y = x\sqrt{3}$$

Problema 3. (3 puntos) Dada la función $f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. Se pide(a) (2,5 puntos) Calcular la integral $\iiint_{V_R} f(x, y, z) dx dy dz$, con $0 < R < 1$, y siendo

$$V_R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{array}{l} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

(b) (0.5 puntos) Calcular la integral impropia $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, donde

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{array}{l} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

NOTA:

- La duración del examen es de 2,5h.
- Los problemas deben ser entregados en hojas separadas.

SOLUCIONES, - PROBLEMA 1.

9.-

$$P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin u \cos(t-u) du\right\} = \mathcal{L}\{\sin t * \cos t\} =$$

$$= \mathcal{L}\{\sin t\} \cdot \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} t \sin t\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{t \sin t\} = \frac{1}{2} (-1)' \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Para hallar $\mathcal{L}\{r(t)\} = R(s)$ escribimos la función mediante la función de Heaviside

$$r(t) = [t h(t) - t h(t-3)] + [(-t+6) h(t-3) - (-t+6) h(t-6)] =$$

$$= t h(t) + (-2t+6) h(t-3) - (-t+6) h(t-6) =$$

$$= t h(t) - 2(t-3) h(t-3) + (t-6) h(t-6)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{t h(t)\} - 2 \mathcal{L}\{(t-3) h(t-3)\} + \mathcal{L}\{(t-6) h(t-6)\} =$$

$$= \frac{1}{s^2} - 2 \frac{1}{s^2} e^{-3s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s} = R(s)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s^2(s^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ A=C=0 \\ B=1 \\ D=-1 \end{aligned} \right\} \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\} = (t - \sin t) h(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

b,-

$$\mathcal{L}\{x'' + x\} = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = -2$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = R(s)$$

$$(s^2 + 1)X(s) - s - (-2) = \frac{1}{s^2} - 2 \frac{1}{s^2} e^{-3s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s}$$

$$(s^2 + 1)X(s) = s - 2 + \frac{1}{s^2} - 2 \frac{1}{s^2} e^{-3s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} - 2 \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} e^{-3s} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} e^{-6s}$$

$$x(t) = \cos t - 2 \sin t + (t - \sin t)h(t) - 2((t-3) - \sin(t-3))h(t-3) \\ + ((t-6) - \sin(t-6))h(t-6) =$$

$$= (t + \cos t - 3 \sin t)h(t) - 2((t-3) - \sin(t-3))h(t-3) +$$

$$+ ((t-6) - \sin(t-6))h(t-6)$$

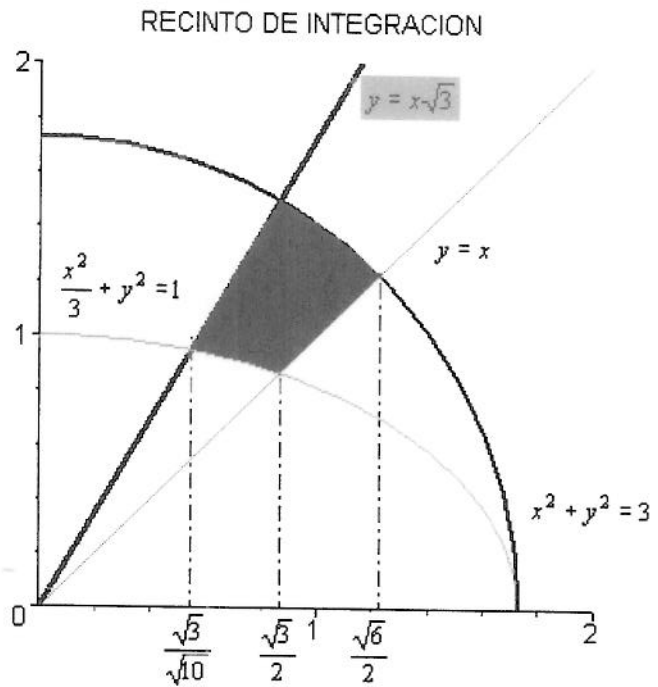
2,

$$\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

PROBLEMA Calcular la integral doble

siendo R el recinto bidimensional del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuaciones respectivas

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3} + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 3 \\ y &= x \\ y &= x\sqrt{3} \end{aligned}$$



SOLUCIÓN:

El recinto R es el representado anteriormente.

Parece más sencillo trabajar con coordenadas polares, con las que el recinto se expresa

$$R^* = \left\{ (\theta, \rho) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \sqrt{\frac{3}{1+2\text{Sen}^2\theta}} \leq \rho \leq \sqrt{3} \right\},$$

quedando la integral como:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2\text{Sen}^2\theta}}}^{\sqrt{3}} \rho \text{Cos}\theta d\rho &= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\text{Cos}\theta - \frac{\text{Cos}\theta}{1+2\text{Sen}^2\theta} \right) d\theta = \frac{3}{2} \left(\text{Sen}\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctg}(\sqrt{2}\text{Sen}\theta) \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \text{Arctg} \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Problema 4. Dada la función $f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. Se pide

(a) Calcular la integral $\iiint_{V_R} f(x, y, z) dx dy dz$, con $0 < R < 1$, y siendo

$$V_R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{array}{l} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Solución: Hacemos el cambio de variable a coordenadas esféricas

$$\Psi = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{cuyo jacobiano verifica } |J_\Psi(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Entonces, al sustituir en la ecuación del cono $x^2 + y^2 = z^2$, que delimita el sólido, se tiene:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \rho^2 \cos^2 \varphi \implies \begin{cases} \rho = 0 \\ \text{ó} \\ \tan^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

y, dado que $z \geq 0$, entonces $\tan \varphi = 1$ y, por tanto, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Por otro lado, las esferas centradas en el origen y de radios 1 y R , que son las otras superficies que delimitan el sólido, en coordenadas esféricas tienen las ecuaciones $\rho = 1$ y $\rho = R$, respectivamente. Así, el recinto $S_R \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\Psi(S_R) = V_R$ es

$$S_R = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]; \begin{array}{l} R \leq \rho \leq 1 \\ \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

Por consiguiente, aplicando el teorema del cambio de variable, la integral pedida será:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_R} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{S_R} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \rho \cos \varphi}{\rho^4} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_R^1 \rho d\rho \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\beta(1/2, 3/2) \cdot \left(\left[\frac{\operatorname{sen}^4 \varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \right) \cdot \left(\left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=R}^{\rho=1} \right) \\ &= \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(2)} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \frac{1}{2} (1 - R^2) = \frac{\pi}{32} (1 - R^2) \end{aligned}$$

$(*) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$

(b) Calcular la integral impropia $\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz$, donde

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{array}{l} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Si V_{R_n} el recinto descrito en el apartado (a) con $R_n = 1/n$, entonces $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{R_n}$ y se verifica que $V_{R_n} \subset V_{R_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, la integral impropia se puede calcular:

$$\iiint_V \frac{x^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{V_{R_n}} \frac{x^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{32} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{32}$$