Soluciones del examen de Análisis Matemático

(2/septiembre/2010)

Curso 2009-2010

Problema 1. (2,5 puntos)
Obtenga la solución general de la siguiente ecuación diferencial de Bernouilli y determine la solución particular que pasa por el punto $(1,1)$

$$y' + \frac{1}{x}\,y = x^3y^3$$

Solución: En primer lugar, obsérvese que $y=0$ es una solución particular de la ecuación, si $y \neq 0$ dividimos ambos miembros de la ecuación por y^3, obteniendo

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{x}\,\frac{1}{y^2} = x^3$$

Haciendo el cambio de variable $\begin{cases} z = \dfrac{1}{y^2} \\ z' = -2\dfrac{y'}{y^3} \end{cases}$, la ecuación se transforma en la ecuación lineal completa:

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x^3$$

Para resolver ésta, en primer lugar, resolvemos la ecuación homogénea asociada (de variables separables)

$$z' - \frac{2}{x}z = 0,$$

que tiene $z=0$ como solución particular, y si $z \neq 0$, separamos variables e integramos dicha ecuación:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2}{x}\,dx$$

luego,

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln C, \quad C>0$$
$$\ln|z| = \ln Cx^2, \quad C>0$$
$$|z| = Cx^2, \quad C>0$$
$$z = Cx^2, \quad C \neq 0,$$

y añadiendo la solución $z=0$, se tiene que la solución general de la ecuación lineal homogénea es

$$z = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ahora resolvemos la lineal completa por el método de variación de las constantes: Suponemos que la solución es de la forma

$$z = C(x)x^2$$

y hallamos $C(x)$, para lo cual derivamos la función anterior:

$$z' = C'(x)x^2 + C(x)2x,$$

y sustituimos en la ecuación lineal completa:

$$C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = -2x^3,$$

que operando,

$$C'(x) = -2x \implies C(x) = -x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$z = (-x^2 + K)x^2 = Kx^2 - x^4, \quad K \in \mathbb{R},$$

es la solución general de la ecuación lineal completa. Finalmente, deshaciendo el cambio de variable y añadiendo la solución particular perdida en el primer cambio de variable, se tiene que la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} = Kx^2 - x^4, \quad K \in \mathbb{R} \\ \\ y = 0 \end{cases}}$$

En cuanto a la solución particular que pasa por $(1,1)$, sustituyendo en la solución general x e y por 1, se tiene:

$$1 = K - 1 \implies K = 2$$

por tanto, la solución pedida es

$$\boxed{\frac{1}{y^2} = 2x^2 - x^4}$$

Problema 2. *(2,5 puntos) Dadas las funciones*

$$y_1(t) = e^{-t/4}\cos(4t)$$

$$y_2(t) = e^{-t/4}\,\text{sen}(4t)$$

Se pide:
(a) Demostrar que son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(b) Determinar una ecuación lineal para la cual constituyan un sistema fundamental de soluciones.

Solución:
(a) Estas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$, veamos que si

$$Ae^{-t/4}\cos(4t) + Be^{-t/4}\,\text{sen}(4t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

necesariamente $A = B = 0$. En efecto, dado que la igualdad ha de verificarse para todo valor real de t, en particular:

- Si $t = 0$, en cuyo caso, $A\cos 0 + B\cdot 0 = 0 \implies A = 0$.

- Si $t = \dfrac{\pi}{8}$, en cuyo caso, $Ae^{-\pi/32}\cos\dfrac{\pi}{2} + Be^{-\pi/32}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow Be^{-\pi/32} = 0 \Longrightarrow B = 0.$

Otra forma: Teniendo en cuenta que las funciones dadas son soluciones de una ecuación diferencial lineal, podemos utilizar la caracterización de la linealidad mediante su wronskiano. Calculamos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1'(t) = e^{-t/4}\left(-\frac{1}{4}\cos(4t) - 4\operatorname{sen}(4t)\right)$$

$$y_2'(t) = e^{-t/4}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + 4\cos(4t)\right)$$

Entonces, el wronskiano de y_1, y_2 es

$$W(y_1,y_2)(t) = e^{-t/2}\begin{vmatrix} \cos(4t) & \operatorname{sen}(4t) \\ -\frac{1}{4}\cos(4t) - 4\operatorname{sen}(4t) & -\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + 4\cos(4t) \end{vmatrix} = 4e^{-t/2} \neq 0 \;\forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, y_1, y_2 son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

(b) Las funciones dadas corresponden a soluciones, linealmente independientes, de una ecuación lineal de coeficientes constantes cuyo polinomio característico tiene los valores complejos $-\dfrac{1}{4} \pm 4i$ por raíces, y, dado que las dos funciones han de formar un sistema fundamental, serán las únicas raíces (el polinomio ha de tener grado 2). Por tanto,

$$P(\lambda) = \left(\lambda - (-\frac{1}{4} + 4i)\right)\left(\lambda - (-\frac{1}{4} - 4i)\right) = \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 + 16 = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} + 16 = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{257}{16}$$

es polinomio característico de la ecuación lineal homogénea

$$\boxed{y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{257}{16}y = 0}$$

cuyo sistema fundamental son las funciones dadas.

Otra forma: Si queremos que y_1, y_2 sean un sistema fundamental, como ya son linealmente independientes, con cualquier otra solución y de la ecuación buscada formarán un sistema linealmente dependiente y, por tanto su wronskiano será nulo. Es decir,

$$W(y_1,y_2,y)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t/4}\cos(4t) & e^{-t/4}\operatorname{sen}(4t) & y \\ e^{-t/4}\left(-\frac{1}{4}\cos(4t) - 4\operatorname{sen}(4t)\right) & e^{-t/4}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + 4\cos(4t)\right) & y' \\ e^{-t/4}\left(-\frac{255}{16}\cos(4t) + 2\operatorname{sen}(4t)\right) & e^{-t/4}\left(-\frac{255}{16}\operatorname{sen}(4t) - 2\cos(4t)\right) & y''' \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el anterior determinante y simplificando, se obtiene:

$$4y'' + 2y' + \frac{257}{4}y = 0$$

Problema 3. (2,5 puntos)

(a) (1 punto) Halle la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \le t < 1 \\ 2-t, & si\ 1 \le t < 2 \\ 0, & si\ t \ge 2 \end{cases}$

(b) (1,5 puntos) Resuelva el problema de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) - 9\int_0^t x(u)\,du = f(t) \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$

Solución: (a) Utilizando la función de Heaviside, f se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1\,[h(t) - h(t-1)] + (2-t)[h(t-1) - h(t-2)] \\ &= h(t) + (-1+2-t)h(t-1) - (2-t)h(t-2) \\ &= h(t) - (t-1)h(t-1) + (t-2)h(t-2) \end{aligned}$$

Aplicando la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(h(t)) - \mathcal{L}((t-1)h(t-1)) + \mathcal{L}((t-2)h(t-2))$$

y, dado que, si $a > 0$, es $\mathcal{L}((t-a)h(t-a)) = \dfrac{e^{-as}}{s^2}$, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\,e^{-s} + \frac{1}{s^2}\,e^{-2s}}$$

Otra forma: Utilizando directamente la definición de transformada de Laplace de una función, se tiene:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) = \int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt$$

y calculando las anteriores integrales se llega al mismo resultado.

(b) Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, teniendo en cuenta sus propiedades y llamando $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$, se tiene:

$$sX(s) - x(0) - 9\frac{X(s)}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-2s} - e^{-s}\right),$$

y teniendo en cuenta la condición inicial del problema de Cauchy dado, se llega a

$$\frac{s^2-9}{s}\,X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-2s} - e^{-s}\right),$$

por tanto,

$$X(s) = \frac{1}{s^2-9} + \frac{1}{s(s^2-9)}\left(e^{-2s} - e^{-s}\right).$$

Así, la solución problema dado es

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-9)}\left(e^{-2s} - e^{-s}\right)\right), \qquad (1)$$

siendo la primera transformada inmediata y, la segunda, se calcula descomponiendo, previamente, en fracciones simples la función racional que aparece como factor, esto es:

$$\frac{1}{s(s^2-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3} = \frac{A(s-3)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s-3)}{s(s^2-9)}$$

y podemos determinar A, B y C particularizando valores de s:

$$\text{si } s=0 \Longrightarrow 1=-9A \Longrightarrow A=-1/9,$$

$$\text{si } s=3 \Longrightarrow 1=18B \Longrightarrow B=1/18,$$

$$\text{si } s=-3 \Longrightarrow 1=18C \Longrightarrow C=1/18.$$

Así,

$$\frac{1}{s(s^2-9)} = -\frac{1}{9}\frac{1}{s} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+3}\right) = -\frac{1}{9}\frac{1}{s} + \frac{1}{9}\frac{s}{s^2-9}$$

y entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-9)}\right) = -\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-9}\right) = \frac{1}{9}\left(-1+\cosh(3t)\right)h(t) \qquad (2)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2) y aplicando el teorema del retardo, (1) quedaría:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3}\operatorname{senh}(3t)h(t) + \frac{1}{9}(\cosh(3(t-2))-1)h(t-2) - \frac{1}{9}(\cosh(3(t-1))-1)h(t-1)}$$

Problema 4. (2,5 puntos) *Calcule la integral triple*

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdydz$$

donde $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0,\ \ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

Solución: Consideremos el cambio de variable a coordenadas esféricas: $\Psi \equiv \begin{cases} x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$

cuyo jacobiano es $J_\Psi(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\operatorname{sen}\varphi$, entonces el recinto de integración se transforma en:

$$\Psi^{-1}(\Omega) = \left\{ (\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \ / \begin{array}{c} 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq\pi/2 \\ 0\leq\varphi\leq\pi/2 \end{array} \right\}$$

y, aplicando el teorema del cambio de variable, la integral se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdydz &= \iiint_{\Psi^{-1}(\Omega)} (\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi)|\rho^2\operatorname{sen}\varphi|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \iiint_{\Psi^{-1}(\Omega)} \rho^4\operatorname{sen}^3\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_0^1 \rho^4\,d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{1}{5}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\beta\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/2)} = \boxed{\frac{\pi}{15}}
\end{aligned}$$