

Problemas de Análisis Matemático

Hoja N^o 2: Integrales múltiples

1. Hallar las siguientes integrales:

a) $\iint_R (x \operatorname{sen} y - ye^x) dx dy$, siendo R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. (**Sol.:** $\frac{\pi^2}{2^3} (\frac{1}{e} - e)$.)

b) $\iint_D (xy)^2 dx dy$ donde $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} xy < 1, y > 0 \\ (x - y)(x - 2y) < 0 \end{array} \right\}$ (**Sol.:** $\frac{1}{6} \ln 2$.)

c) $\iint_D x(y - 4) dx dy$ donde $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$. (**Sol.:** -8 .)

2. Calcular las siguientes integrales dobles utilizando un cambio de variable apropiado:

a) $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, siendo $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. (**Sol.:** $\frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$.)

b) $\iint_D \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{y}}}{y(x^2 + y^2)} dx dy$, donde D es el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $x = y$, $x = 2y$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$. (**Sol.:** $(e^2 - e) (\arctan 2 - \frac{\pi}{4})$.)

c) $\iint_D xy dx dy$, donde D es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = \frac{9}{4}$. (**Sol.:** $\frac{25}{32}$.)

3. Calcular las siguientes integrales dobles utilizando el cambio a coordenadas polares:

a) $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$, donde $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3} \end{array} \right\}$ (**Sol.:** $\frac{\pi^2}{6}$.)

b) $\iint_D (x + y) dx dy$, donde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq x + y\}$. (**Sol.:** $\frac{\pi}{2}$.)

c) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, donde D es la región del primer cuadrante limitada por las elipses $x^2 + 4y^2 = 1$ y $x^2 + 4y^2 = 4$. (**Sol.:** $\frac{75\pi}{128}$.)

d) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, donde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$. (**Sol.:** $\frac{\pi a^3}{6}$.)

4. Calcular las áreas de las regiones siguientes:

a) $\rho \leq 2a$, $\rho \leq 4a \cos \theta$, $a > 0$. (**Sol.:** $a^2(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3})$.)

b) $\rho \geq 2$, $\rho \leq 2(1 + \cos \theta)$, e interior al primer cuadrante. (Sol.: $\frac{\pi+8}{2}$.)

c) $(x^2 + y^2)^2 \leq \sqrt{xy}$, e interior al primer cuadrante. (Sol.: $\frac{3\Gamma^2(2/3)}{4\Gamma(1/3)}$.)

5. Calcular los volúmenes de los sólidos limitados por:

a) $z = 0$, $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$, con $p, q > 0$, y $x^2 + y^2 = a^2$. (Sol.: $\frac{\pi a^4}{8pq}(p + q)$.)

b) $z^2 = x^2 + y^2$, $(z - 2)^2 = x^2 + y^2$ y $z \geq 0$. (Sol.: $\frac{2\pi}{3}$.)

c) $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$ e $y > 0$. (Sol.: $\frac{9a^4}{4}$.)

d) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x$ y $z = 2x$. (Sol.: π .)

e) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ y la superficie de ecuación $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$. (Sol.: $\frac{\pi}{6}$.)

f) $3x^2 + y^2 = 72z$ y $2x^2 + y^2 = 24(2 - z)$ (Sol.: 24π .)

g) $z = 3x^2 + y^2$ y $z = 3 - y^2$. (Sol.: $\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2}}$.)

h) $y^2 + z^2 = -2(x - 1)$ y $z^2 + y^2 = 2(x + 1)$. (Sol.: 2π .)

6. Calcular el área de las siguientes superficies:

a) La parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ dentro de del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. (Sol.: $8a^2$.)

b) La parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. (Sol.: $2\sqrt{2}\pi$.)

c) La parte de $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ dentro del paraboloido $x^2 + y^2 = z$. (Sol.: 4π .)

7. Calcular las integrales triples siguientes:

a) $\iiint_V (4x - y + z) dx dy dz$, donde V es el sólido limitado por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ y $z = 2 - x^2$. (Sol.: $\frac{5}{3}$.)

b) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, donde V está limitado por $2z = x^2 + y^2$ y $z = 2$. (Sol.: $\frac{16\pi}{3}$.)

c) $\iiint_V x dx dy dz$, donde V es el tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$. (Sol.: $\frac{1}{24}$.)

d) $\iiint_V z dx dy dz$, donde V es el recinto del semiespacio $z \geq 0$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y al cono $x^2 + y^2 = z^2$. (Sol.: $\frac{\pi}{8}$.)

e) $\iiint_V \sqrt{2 - x^2 - y^2} dx dy dz$ siendo V el sólido interceptado por $x^2 + y^2 + z = 4$ y $z^2 = 2(x^2 + y^2)$, y situado el semiespacio $z \geq 0$. (Sol.: $\pi\sqrt{2}(\frac{64}{15} - \frac{\pi}{2})$.)

8. Calcular el volumen de los sólidos limitados por:

a) El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$. (Sol.: $\frac{4\pi}{3}abc$)

- b) $x = 1$ y $x = 2$ y los conos $y^2 + z^2 = x^2$ y $y^2 + z^2 = \frac{x^2}{9}$. (Sol.: $\frac{56\pi}{27}$)
- c) $x^2 + y^2 = 2ax$ y a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ ($a > 0$). (Sol.: $(\frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9})a^3$)
- d) $x^2 - 2y + y^2 = 1$ y $y - z = 0$ y $z = 0$. (Sol.: $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$)
- e) $z = 0$, el paraboloides $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$. (Sol.: $\frac{3ab\pi}{2}$.)
- f) $z = x^2 + y^2$, $z = 3(x^2 + y^2)$, $z = 1$ y $z = 3$. (Sol.: $\frac{8\pi}{3}$.)

9. Calcular las siguientes integrales:

- a) $\iint_D |xy|$ donde D es el recinto limitado por $y^4 = x(2-x)$. (Sol.: $\frac{\pi}{2}$.)
- b) $\iiint_D |y|\sqrt{x^2 + y^2}$ donde D es el recinto limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Sol.: $\frac{1}{120}$.)
- c) $\iiint_D x^2 + y^2 dx dy dz$ donde D es el recinto limitado por los paraboloides $z = 3(x^2 + y^2)$ y $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 1$ y $z = 3$. (Sol.: $\frac{104\pi}{27}$.)
- d) $\iiint_V z^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/4} dx dy dz$ siendo V el recinto limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. (Sol.: $\frac{7\pi^2}{16\sqrt{2}}$.)

10. Calcular las siguientes integrales múltiples impropias:

- $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Sol.: 2π .)
- $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$, con $p > 0$ y donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 1\}$. (Sol.: $\frac{\pi}{p-1}$ si $p > 1$, y es ∞ si $0 < p \leq 1$.)
- $\iiint_V \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}$, con $p, q, r > 0$ y donde $V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. (Sol.: $\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$ si $p, q, r < 1$, y es divergente en el resto de los casos.)
- $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$. (Sol.: $\pi\sqrt{\pi}$.)
- $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx dy dz}{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2}$. (Sol.: $\frac{\pi^2}{|a|}$ si $a \neq 0$, y es divergente si $a = 0$.)

11. Calcular el volumen del sólido que contiene al punto $(0, 0, 1)$ y está comprendido entre las superficies $z = 0$ y $z = -2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. (Sol.: π)