Problemas de Análisis Matemático

Hoja Nº 1: Integrales Eulerianas.

1. Calcular, usando integrales eulerianas, el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{1/4}}$ **(i)** $\displaystyle\int_0^1 x^m\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx, (p,m>-1)$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^5}dx$ **(f)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ **(j)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x^5a^{-3x}dx, a>1$ **(g)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^6\theta\cos^2\theta d\theta$ **(k)** $\displaystyle\int_0^{a^{1/n}} (a-x^n)^p dx, a>0, n\in\mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-n^2x^2}dx$ **(h)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sen^3\theta\cos^2\theta d\theta$ (l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\tan x}}+\frac{1}{\sqrt{\cot x}}\right)dx$

Sol:. (a) $\frac{\pi}{8}$; (b) $\frac{1}{5}\Gamma(\frac{2}{5})$; (c) $\frac{5!}{(3\ln a)^6}$; (d) $\frac{\sqrt{\pi}}{2n^3}$; (e) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (f) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\frac{3}{4})^2$; (g) $\frac{5\pi}{256}$; (h) $\frac{2}{15}$; (i) $\frac{\Gamma(p+1)}{(m+1)^{p+1}}$; (j) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; (k) $\frac{a^{p+1/n}}{n}\beta(\frac{1}{n},p+1)$; (l) $\pi\sqrt{2}$.

2. Calcula, usando la regla de Leibnitz, $I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t^2+x^2)^2}$ sabiendo que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+x^2}=\frac{\pi}{4x}$. Utilizando lo anterior obtener obtener $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ para $n=2,3$. (**Sol:.** $I(x)=\frac{\pi+2}{8x^3}$; $I_2=\frac{\pi+2}{8}$, $I_3=\frac{3\pi+8}{32}$.)

3. Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{ax}\operatorname{sen}x dx$ para $a\in\mathbb{R}$. Derivar respecto del parámetro y particularizar en $a=1$ para calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} xe^x\operatorname{sen}x dx$. (**Sol.**: $\frac{\pi}{4}e^{\pi/2}-\frac{1}{2}$).

4. **a)** Calcula la integral $I(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx, a>0$. (**Sol.**: $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$).

b) Derivando respecto del parámetro, calcula la integral siguiente sabiendo que $J(1)=\sqrt{\pi}$,

$$J(a)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx, \qquad a>0. \qquad (\textbf{Sol.}: \sqrt{a\pi}).$$

5. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx$ con $a>0$ utilizando dos métodos distintos: derivando respecto del parámetro $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}dx$ y mediante integrales eulerianas. (**Sol:.** $\frac{n!}{a^{n+1}}$).

6. Halla el área del recinto encerrado por la curva $x^{2/5}+y^{2/5}=a^{2/5}$ (**Sol.** : $\frac{15\pi a^2}{128}$)