

Problemas de Análisis Matemático

Hoja N^o 4: Ecuaciones diferenciales generales

1. La velocidad de crecimiento de una población bacteriana es proporcional a su tamaño en cada instante. En cierto cultivo de bacterias, el número de éstas se ha sextuplicado en 10 horas. ¿Qué tiempo tardó la población en duplicar su número inicial?

Sol.: $t = 10 \frac{\ln 2}{\ln 6} \approx 3,8685$ horas.

2. La ley de Newton para el enfriamiento afirma que la rapidez con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente que le rodea. Un cuerpo con una temperatura de 80°F se coloca en el instante $t = 0$ en un medio cuya temperatura se mantiene a 50°F. Al cabo de 5 minutos, el cuerpo se ha enfriado hasta los 70°F, se pide:

(a) Hallar la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos.

(b) ¿Cuándo será de 60°F dicha temperatura?

Sol.: (a) $T = 50 + 40/3$, (b) $t = 5 \log_{2/3}(\frac{1}{3})$.

- 3 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(3xy + y^2)dx + (3xy + x^2)dy = 0$

(b) $y' = (x + y)^2$.

(c) $y' = \frac{y + 3}{x + y}$

(d) $y' = \text{sen}^2(x - y + 1)$

(e) $(x + y)y' = 2y - 1$.

(f) $(y + x + 1)dx + (2y + 2x + 1)dy = 0$.

(g) $\text{sen}(xy) + (xy) \cos(xy) + x^2 \cos(xy)y' = 0$

(h) $y' - y \tan x = \cos x$

Sol.: (a) $xy(x + y)^2 = c, c \in \mathbb{R}$. (b) $y = \tan(x + c) - x$ con $c \in \mathbb{R}$.

(c) $y + 3 = ce^{\frac{x-3}{y+3}}$ con $c \in \mathbb{R}$.

(d) $\begin{cases} \tan(x - y + 1) = x + c, & c \in \mathbb{R} \\ x - y + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (x - y + 1)^2 = c(2y - 1), & c \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

(f) $x + y = ce^{-x-2y}$ con $c \in \mathbb{R}$.

(g) $x \text{sen}(xy) = k, k \in \mathbb{R}$. (h) $y = \frac{1}{2} \text{sen } x + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{K}{\cos x}, K \in \mathbb{R}$.

- 4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(2xy^2 - 3x^3)dx + (2yx^2 + 2y - 1)dy = 0$

(b) $x^2y' = 2y(x + \sqrt{y})$

(c) $x = (xy' + y)\sqrt{1 + x^2}$

(d) $x^2dt - (tx + t^3)dx = 0$

(e) $(1 + x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, donde

$y = -x$ es solución particular.

(f) $2y' = y + (x - 1)y^3$.

(g) $y' - y \tan x + y^2 \cos x = 0$.

Sol.: (a) $x^2y^2 - \frac{3}{4}x^4 + y^2 - y = c, c \in \mathbb{R}$. (b) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{(\ln|x|+c)^2}, & c \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$.

(c) $y = \frac{c+\sqrt{1+x^2}}{x}, c \in \mathbb{R}$. (d) $\begin{cases} \frac{1}{t^2} = \frac{c-2x}{x^2}, & c \in \mathbb{R} \\ t = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y = \frac{1-cx}{x^2+c}, & c \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}$.

(f) $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2-x+ce^{-x}}}, & c \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} y = \frac{1}{(x+c)\cos x}, & c \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para las que se plantea la forma de un posible factor integrante:

(a) $(y \ln y + ye^x)dx + (x + y \cos y)dy = 0$, que admite factor integrante μ dependiente de una sola variable.

(b) $6xy dx + \left(4x^2 + \frac{10}{x}\right) dy = 0, \mu(x, y) = y\beta(x)$.

(c) $(x^4y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0, \mu(x, y) = \varphi(xy)$.

(d) $\left(\frac{e^{-y}}{x} + 2x^3y\right)dx + x^4(1 + y)dy = 0, \mu(x, y) = x^{-2}f(y)$

(e) $y^2 + (xy + 1)y' = 0, \mu(x, y) = \alpha(xy)$.

Sol.: (a) $x \ln y + e^x + \sin y = c, c \in \mathbb{R}$; (b) $2x^3y^2 + 5y^2 = c, c \in \mathbb{R}$;

(c) $\frac{x^3+y^3}{3} + \frac{1}{xy} = c, c \in \mathbb{R}$ y $y = 0$; (d) $-\frac{1}{2x^2} + x^2ye^y = c, c \in \mathbb{R}$; (e) $ye^{xy} = c, c \in \mathbb{R}$.

6. Encontrar la solución general de la ecuación $y' = y^2 - 2xy + 1 + x^2$ sabiendo que $y = x$ es una solución particular de la ecuación.

Sol.: $1 = (y - x)(c - x), c \in \mathbb{R}$ y $y = x$.

7. Los puntos medios de los segmentos de tangente a una curva comprendidos entre el punto de contacto y el eje OX describen la parábola $y^2 = 2x$. Hallar la curva sabiendo que pasa por el punto (1,2).

Sol.: $x = \frac{y^2(1+\ln 2 - \ln |y|)}{4}$.

8. Encuentra la curva o curvas que verifican que la proyección sobre el eje de abscisas de la parte de la tangente entre cada punto (x, y) y dicho eje tiene longitud 1.

Sol.: $y = ke^x, y = ke^{-x}, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

9. Una curva pasa del origen al primer cuadrante. El área bajo la curva desde $(0, 0)$ a cada punto (x, y) es un tercio del área del rectángulo que, con los lados paralelos a los ejes, tiene esos puntos como vértices opuestos. Determinar dicha curva.

Sol.: $y = kx^2, k > 0$.

10. Sabiendo que $\mu(x, y) = 3xy^2$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{xy}\right) dx + Q(y)dy = 0$, se pide determinar $Q(y)$ y resolver la ecuación resultante.

Sol.: $Q(y) = -\frac{1}{y^2}; -3xy + x^3 = c, c \in \mathbb{R}$.

11. Sabiendo que la ecuación diferencial $(3xy + \frac{\cos x}{x})dx + (2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy})dy = 0$ admite un factor integrante $\mu(x, y) = x\alpha(y)$, hallar su solución general.

Sol.: $x^3y^2 + y \operatorname{sen} x = C, C \neq 0$.

12. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

(b) $yy'' - y'^2 = 0$.

(c) $yy'' = y^2y' + y'^2, y(0) = -1/2, y'(0) = 1$.

Sol.: (a) $\begin{cases} y = \frac{ex^2}{2} + c, c \in \mathbb{R} \\ y = \frac{kx-1}{k^2}e^{kx+1} + c, k \neq 0, c \in \mathbb{R} \end{cases}$ (b) $y = ke^{cx}, c, k \in \mathbb{R}$.

(c) $y = \frac{3}{2-8e^{3x/2}}$.

13. Obtener:

1. La ecuación diferencial cuya solución general es $y = \operatorname{sen} x + c \cos x, c \in \mathbb{R}$.

2. La ecuación diferencial que satisfacen todas las circunferencias de radio 1, cuyo centro es un punto de la recta $y = x$.

Solución: 1. $y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1$. 2. $(x - y)^2(1 + y'^2) = (1 + y')^2$.

14. Dada la ecuación diferencial $y' = xy + (x - 1)\alpha(x) + 7$, donde α es una función continua en \mathbb{R} , calcular la intersección de las rectas tangentes en $(1, 0)$ y $(1, 1)$ a las soluciones que pasan por esos puntos.

Solución: $(0, -7)$.

15. Encontrar las trayectorias ortogonales a cada una de las siguientes familias uniparamétricas de curvas:

(a) $xy = c$

(b) $y = cx^2$

(c) $y = ce^x$

(d) $y(cx + 1) = x$

(e) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$

(f) $x^2 - xy + y^2 = c$

donde, en todos los casos, $c \in \mathbb{R}$.

Sol.: (a) $y^2 - x^2 = k, k \in \mathbb{R}$. (b) $x^2 + 2y^2 = k, k \in \mathbb{R}$. (c) $\frac{y^2}{2} + x = k, k \in \mathbb{R}$.

(d) $x^3 + y^3 = k, k \in \mathbb{R}$. (e) $x + \frac{y^2}{x} = k, k \neq 0$. (f) $y - x = k(y + x)^3, k \in \mathbb{R}, y + x = 0$.

16. Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de elipses $x^2 - xy + y^2 = c, c \in \mathbb{R}$.

Sol.: $y - x = c(y + x)^3, c \in \mathbb{R}$.

17. Obtener las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

$$3x^2 + y^2 = cx, c \in \mathbb{R}$$

Sol.: $y^2 - x^2 = cy^3, c \in \mathbb{R}$ y $y = 0$.

18. Hallar la curva que pasa por $(1, 3)$ y es perpendicular a todas las rectas que pasan por $(-1, 1)$.

Sol.: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$.

19. Dada la ecuación diferencial $y' = \frac{2x + e^y}{-xe^y}$, se pide:

(a) Determinar los dominios del plano donde se puede asegurar existencia y unicidad de soluciones.

(b) Hallar todas sus soluciones.

(c) Hallar las soluciones que pasan por el $(1, 0)$.

Solución: (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. (b) $x^2 + xe^y = c, c \in \mathbb{R}$. (c) Pasa la única solución $y = \ln\left(\frac{2-x^2}{x}\right)$.

20. Dada la ecuación diferencial $(x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$ se pide:

(a) Determinar los dominios del plano donde se puede asegurar existencia y unicidad de soluciones.

(b) Hallar todas sus soluciones teniendo en cuenta que admite un factor integrante dependiente de una sola variable.

(c) Hallar las soluciones que pasan por el $(1, 0)$.

Sol.: (a) $D = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, y); y = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$. (b) $e^x(\sin y + x - 1) = c, c \in \mathbb{R}$. (c) Pasa la única solución $y = \arcsen(1 - x)$.

21. Dada la ecuación diferencial $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$, se pide:

(a) Determinar los dominios del plano donde se puede asegurar existencia y unicidad de soluciones.

(b) Hallar todas sus soluciones.

(c) Resolver el problema de Cauchy $\begin{cases} xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \\ y(e^\pi) = 0 \end{cases}$

Sol.: (a) $D = \{(x, y); |x| > |y|\}$. (b) $\begin{cases} y = x \sen(c + \ln|x|), c \in \mathbb{R} \\ y = \pm x \end{cases}$

(c) $y = x \sen(\ln x - \pi)$.