

## Hoja 5. Ecuaciones diferenciales lineales

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

(a)  $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ , sabiendo que admite soluciones polinómicas.

(b)  $xy'' + 2y' + xy = 0$ , sabiendo que  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  es una solución particular.

**Sol.:** (a)  $y = c_1(x^2 - 1) + c_2x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (b)  $y = \frac{c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x}{x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a)  $(1 - x)y'' + xy' - y = 1$

(b)  $x^2y'' - x(2x + 3)y' + (x^2 + 3x + 3)y = (6 - x^2)e^x$ , sabiendo que  $y = xe^x$  es solución de la ecuación homogénea asociada.

(c)  $x^2y'' - x(x + 4)y' + 2(x + 3)y = x^5$ , sabiendo que la ecuación homogénea asociada admite una solución particular de la forma  $y = x^n$ .

(d)  $(2x + 1)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 4(2x + 1)^2e^{2x}$ , sabiendo que  $y = e^{2x}$  es solución de la ecuación homogénea asociada.

**Sol.:** (a)  $y = c_1x + c_2e^x - 1$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (b)  $y = (x + \frac{2}{x} + c_1x^2 + c_2)xe^x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (c)  $y = \frac{-x^3(x+2)}{2} + (c_1 + c_2e^x)x^2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (d)  $y = c_1e^{2x} + c_2(x + 1) + 2(x^2 + x - 1)e^{2x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

3. Halla la solución general de la ecuación:

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3e^x$$

sabiendo que su ecuación homogénea asociada admite dos soluciones particulares cuyo cociente es  $\tan x$ .

**Sol.:**  $y = (a \cos x + b \operatorname{sen} x)x + \frac{xe^x}{2}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

4. Dada la ecuación:

$$y'' + \left( \tan x - \frac{2}{x} \right) y' + \frac{f(x)}{x^2} y = x \tan x$$

se pide:

(a) Determina  $f(x)$  sabiendo que la ecuación homogénea asociada admite dos soluciones particulares cuyo cociente es  $\operatorname{sen} x$ .

(b) Siendo  $f(x)$  la función determinada en el apartado anterior, y sabiendo que la ecuación completa admite una solución particular del tipo  $y = x^n$ , halla su solución general.

**Sol.:** (a)  $f(x) = 2 - x \tan x$ . (b)  $y = (a + b \operatorname{sen} x)x + x^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

5. Resuelve la ecuación diferencial:

$$y'' + (\tan x - 3 \cot x) y' + 3 \cot^2 xy = 3 \tan^3 x$$

sabiendo que la ecuación homogénea asociada admite dos soluciones particulares tales que una de ellas es el cubo de la otra.

**Sol.:**  $y = (c_1 + c_2 \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x + \tan x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

6. Dada la ecuación:  $xy'' + (2 - 3x)y' - 3y = 20x^3 - 15x^4$ , se pide:

(a) Calcula una solución para la ecuación completa del tipo  $y = x^m$ .

(b) Halla todas sus soluciones sabiendo que  $y = \frac{x^5 - 7}{x}$  es solución de la ecuación completa.

**Sol.:** (a)  $y = x^4$ . (b)  $y = \frac{c_1 + c_2 e^{3x}}{x} + x^4$ .

7. Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - \left(\frac{2}{x} + \cot x\right)y' + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \cot x\right)y = -x \cot x$$

(a) Halla dos soluciones particulares de la ecuación completa de la forma  $y = x^n + \alpha x$ .

(b) Halla su solución general.

**Sol.:** (a)  $y = x^2$  e  $y = x^2 + x$ . (b)  $y = (c_1 + c_2 \cos x)x + x^2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

8. Sabiendo que admite dos soluciones particulares polinómicas (de grado menor o igual que 2), resuelve la ecuación diferencial:  $(x-1)^2 y'' - 2y = 2 - 4x$ .

**Sol.:**  $y = c_1(x-1)^2 + \frac{c_2}{x-1} + x^2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

9. Determina la ecuación lineal cuya solución general es:  $y = A(x+1)^3 + B(x-1)^3$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ . Basándose en esto, integra la ecuación:

$$(x^2 - 1)y'' - 4xy' + 6y = 2x$$

**Sol.:**  $(x^2 - 1)y'' - 4xy' + 6y = 0$ .  $y = A(x+1)^3 + B(x-1)^3 + x$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .

10. Halla los valores del parámetro  $a \in \mathbb{R}$  para los que  $y = e^x$  es solución de la ecuación homogénea asociada a

$$(x-a)y'' - xy' + a^2y = a(x-1)^2e^x$$

Resuélvela en estos casos.

**Sol.:**  $a = 0$  e  $y = c_1e^{-x} + c_2e^x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; y  $a = 1$  e  $y = c_1e^x + c_2x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

11. Determina los coeficientes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de modo que la ecuación:

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' - y(ax^2 + bx + c) = 0$$

tenga una solución de tipo exponencial. Calcula la solución general de la ecuación obtenida.

**Sol.:**  $y = e^{\lambda x}$  es solución si  $a = c = \lambda^2$  y  $b = -2\lambda$ . En este caso, la solución general es:  $y = c_1e^{\lambda x} + c_2(2\lambda^2x^2 + 2\lambda x + 2\lambda^2 + 1)e^{-\lambda x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

12. Determina  $f(x)$  para que la ecuación diferencial  $xy'' - 2y' + f(x)y = 0$  admita dos soluciones particulares tales que una de ellas sea el cuadrado de la otra. Para la función  $f(x)$  determinada, halla todas las soluciones de la ecuación diferencial.

**Sol.:**  $f(x) = \frac{2x^5}{(x^3+a)^2}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;  $y = c_1\sqrt[3]{x^3+a} + c_2\sqrt[3]{(x^3+a)^2}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

13. Dada la expresión  $x^2y''(x) + 6xy'(x) + 6y(x)$ , calcula una función  $f(x)$  que, multiplicada por la expresión anterior, dé una derivada de una expresión del tipo  $F(x)y(x)$ . Basándose en esto, integra la ecuación:

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = 7$$

**Sol.:**  $f(x) = cx$  y  $F(x) = cx^3$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;  $y = \frac{7}{6} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

14. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

(a)  $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

(d)  $y'' + y' + y = e^{2x} - \sin x$

(b)  $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x} + 3x$

(e)  $y'' + y = \csc x$

(c)  $y'''' - 2y'' + 2y' + y = e^x + 1$

(f)  $y'' + k^2y = \sin bx$ ,  $b, k > 0$

**Sol.:** (a)  $y = c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - (x^2 + 3x + 1)$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ; (b)  $y = (7x^2 + ax + b)e^{-5x} + \frac{15x-6}{125}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ; (c)  $y = 1 + \left(\frac{x^2}{4} + c_1x + c_2\right)e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$ ,  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ; (d)  $y = \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{7}e^{2x} + \cos x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (e)  $y = (c_1 - x) \cos x + (c_2 + \ln |\sin x|) \sin x$ ,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (f)  $y = \begin{cases} c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \frac{\sin bx}{k^2 - b^2} & , \text{ si } b \neq k \\ c_1 \cos kx + c_2 \sin kx - \frac{x \cos kx}{2k} & , \text{ si } b = k \end{cases} ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

15. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

$$(a) x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0 \quad (c) x^2 y''' + 2xy'' - 4y' + 4\frac{y}{x} = 2x \quad (e) x^3 y''' + 5x^2 y'' + 4xy' = 1 + \ln x$$

$$(b) (x-3)^2 y'' + 3y = 2 \quad (d) x^2 y'' - xy' - 3y = -16\frac{\ln x}{x}$$

**Sol.:** (a)  $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^3}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (b)  $y = \frac{2}{3} + \left[ a \cos\left(\frac{\sqrt{11} \ln|x-3|}{2}\right) + b \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11} \ln|x-3|}{2}\right) \right] \sqrt{|x-3|}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ; (c)  $y = ax + bx^2 + \frac{c}{x^2} + \frac{x^2}{2} \ln|x|$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ; (d)  $y = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x} + \frac{\ln x}{x} \left(2 \ln x + \frac{4}{3}\right)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; (e)  $y = \left(\frac{\ln x}{2} - 1\right) \ln x + c_1 + \frac{c_2 + c_3 \ln x}{x}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

16. Hallar todas las soluciones reales de la ecuación diferencial:  $y''' - ay'' + y' - ay = e^x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Sol.:**  $y = \begin{cases} c_1 e^{ax} + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + \frac{e^x}{2(1-a)} & , \text{ si } a \neq 1 \\ (c_1 + \frac{x}{2}) e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x & , \text{ si } a = 1 \end{cases}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

17. Resuelve la ecuación diferencial:  $y''' - y'' - a^2 y' + a^2 y = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Usando lo anterior, halla la solución general de la ecuación:  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$ .

**Sol.:**  $y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + c_3 e^x & , \text{ si } a = 0 \\ (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x} & , \text{ si } a^2 = 1 \\ c_1 e^x + c_2 e^{ax} + c_3 e^{-ax} & , \text{ si } a \neq 0 \text{ y } a^2 \neq 1 \end{cases}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ;  
 $y = c_1 e^x + (x + c_2)e^{2x} + c_3 e^{-2x}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

18. (a) Halla, según los valores de  $a \in \mathbb{R}$ , todas las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''' - (3a+2)y'' + 2a(a+3)y' - 4a^2 y = 0$$

(b) Halla, utilizando lo anterior, todas las soluciones de:  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^x$ .

**Sol.:** (a)  $y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} & , \text{ si } a = 0 \\ c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{2x} & , \text{ si } a = 1 \\ (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{4x} & , \text{ si } a = 2 \\ c_1 e^{ax} + c_2 e^{2ax} + c_3 e^{2x} & , \text{ si } a \neq 0, 1, 2 \end{cases}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ;  
 (b)  $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{2x} + x(x-1)e^x$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

19. Halla todas las soluciones reales de la ecuación diferencial:

$$y'' - (2 \cot x)y' + (5 + 2 \cot^2 x)y = \operatorname{sen} x$$

sabiendo que el cambio de variable dependiente  $y = z \operatorname{sen} x$  la reduce a una ecuación lineal de coeficientes constantes.

**Sol.:**  $y = (a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}) \operatorname{sen} x$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

20. Una solución  $u(x)$  de la ecuación diferencial  $y'' - 4y' + 4y = 0$  corta en el origen a una solución  $v(x)$  de la ecuación diferencial  $y'' - 4y' + 29y = 0$ . Determina  $u$  y  $v$  sabiendo que ambas curvas tienen la misma pendiente en el origen y que  $v'(\pi) = -1$ .

**Sol.:**  $u(x) = x e^{2(x-\pi)}$  y  $v(x) = \frac{1}{5} e^{2(x-\pi)} \operatorname{sen} 5x$ .

21. Encuentra la ecuación diferencial cuyas soluciones son:

$$y = (Ax + B)e^{2x} + (C \operatorname{sen} x + D \cos x)e^{-x} + x^2 e^{2x} + x + 1$$

**Sol.:**  $y'''' - 2y''' - 2y'' + 8y = 20e^{2x} + 8x + 8$ .