Hoja 3. Integrales curvilíneas

1. Halla la longitud de las siguientes curvas:

   (a) El arco de la parábola $y^2 = 12x$ comprendida en el primer cuadrante entre $x = 0$ y $x = 1$.

   (b) La curva $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (c) El arco de hélice cónica dado por la parametrización $\alpha(t) = ae^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $a > 0$, y que va del origen de coordenadas al punto $A(a, 0, a)$.

   (d) El arco parametrizado por $\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   Sol.: (a) $2 + \frac{3}{2}\ln 3$; (b) 8; (c) $a\sqrt{3}$; (d) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Calcula $I = \int_\Gamma xy\,ds$, donde Γ es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ comprendida en el primer cuadrante.
   Sol.: $\frac{1}{2}$.

3. Calcula la masa de una espiral de un muelle que tiene la forma de hélice de ecuación

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) \quad , \qquad t \in [0, 2\pi] \quad , \qquad a, b > 0$$

   si la densidad puntual viene dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   Sol.: $= \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Halla la integral curvilínea

$$I = \int_\gamma (10xz^3 + 1)\,dx - 6y^2\,dy + 15x^2z^2\,dz$$

   donde γ es el trozo de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t/\pi$, comprendida entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.
   Sol.: 40.

5. Dada la expresión diferencial:

$$\frac{y^2 + 2xy + ax^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{x^2 + 2xy + by^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   (a) Determina los valores de a y b que convierten a la expresión anterior en la derivada total de una función $U(x, y)$ para algún conjunto del plano.

   (b) Para los valores de a y b determinados en el apartado anterior, calcula razonadamente la integral de dU sobre la curva γ de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$, recorrida en sentido positivo.

   Sol.: (a) $a = b = -1$; (b) 0.

6. Calcula

$$I = \int_\gamma \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\operatorname{sen}\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

   donde γ es el arco de la curva $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - \pi)^2 = \frac{1}{4}$ que une los puntos $(1, \pi)$ y $(2, \pi)$.
   Sol.: $I = 1 + \pi$.

7. Si $P(x, y) = x + y(x^2 + y^2)^{-1}$ y $Q(x, y) = y - x(x^2 + y^2)^{-1}$, calcula las integrales:

$$I_i = \int_{\gamma_i} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

   donde γ_1 es la elipse $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$, γ_2 el astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, y γ_3 el segmento que une el punto $(1, 1)$ con el punto $(2, 1)$.
   Sol.: $I_1 = 0$; $I_2 = -2\pi$; $I_3 = \frac{6-\pi}{4} + \arctan 2$.

8. Calcula:
$$\int_{\gamma_i} \frac{x\,dx + y\,dy}{e^{x^2+y^2}-1} \quad , \qquad i = 1,2$$
donde γ_1 es el triángulo de vértices $A(7,0)$, $B(6,6)$ y $C(4,5)$, y γ_2 es el cuadrilátero de vértices $D(1,0)$, $E(0,5)$, $F(-6,-1)$ y $G(-1,-5)$.
Sol.: $I_1 = I_2 = 0$.

9. Calcula la integral:
$$I = \int_\gamma \frac{2xy(y+2)\,dx + (y^2 - 2x^2 - 2x^2y)\,dy}{(2x^2+y^2)^2}$$
donde γ es:
   (a) El segmento de extremos $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $B(0,1)$.
   (b) El polígono cerrado de vértices $M(0,3)$, $N(1,2)$, $O(1,0)$, $P(-2,3)$ y $Q(-3, \frac{1}{2})$.

   Sol.: (a) $\frac{-3}{2}$; (b) 0.

10. Calcula $\int_{\widehat{AB}} x\,dy - y\,dx$, siendo $A(a,0)$, $B(0,b)$, $(a,b>0)$:
   (a) sobre el arco de la curva $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ comprendido entre A y B.
   (b) sobre el segmento de extremos A y B.
   (c) Calcula el área limitada por las curvas anteriores.

   Sol.: (a) $\frac{ab\pi}{2}$; (b) ab; (c) $\frac{ab(\pi-2)}{4}$.

11. Aplicando el Teorema de Green-Riemann, calcula la integral curvilínea
$$\int_\gamma e^{y^2}\,dx + (2xye^{y^2} + x + e^{y^3})\,dy$$
donde γ es la curva formada por el segmento que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido por el segmento que va de $(1,1)$ a $(2,0)$.
Sol.: 1.

12. Calcula la integral:
$$\int_\gamma \frac{(x^3+xy^2+x)\,dy - (y^3+yx^2+y)\,dx}{x^2+y^2}$$
donde γ es el arco de la curva $x^6 + y^6 = 5^6$ que va de $B(5,0)$ a $A(-5,0)$ por el semiplano superior.
Sol.: $\pi + \frac{50}{3}\beta\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$.

13. Calcula, aplicando el teorema de Green-Riemann en un contorno adecuado, la integral curvilínea:
$$\int_\gamma (x+1)e^{x+y}\,dx + x(1+e^{x+y})\,dy$$
donde γ es el arco de la circunferencia $x^2+y^2=1$ comprendido en el semiplano superior.
Sol.: $\frac{\pi}{2} - \left(e + \frac{1}{e}\right)$.

14. Utilizando el teorema de Green-Riemann, halla la integral curvilínea:
$$\int_\gamma (1+y)e^{x-y}\,dx + (x^5 - ye^{x-y})\,dy$$
donde γ es el arco de la circunferencia $x^2+y^2=1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.
Sol.: $\frac{5\pi}{32} + 2e^{-1} - e$.

15. Calcula el valor de las siguientes integrales curvilíneas:

$$\int_\gamma (2xe^{x^2+2y^2} - y)\,dx + (4ye^{x^2+2y^2} + x^2)\,dy$$

donde γ es:

(a) el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.

(b) el arco de la curva $y = 2 - x^2$ que va desde el punto $A(1,1)$ hasta el punto $B(-1,1)$.

Sol.: (a) $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} + e(e-1)$; (b) $I = \frac{10}{3}$.

16. Calcula, usando el teorema de Green-Riemann, la integral

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2} - 2y \right) dx + \frac{y-1}{(x-2)^2 + (y-1)^2}\,dy$$

donde γ es el arco de la elipse $4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, comprendido en el primer cuadrante, que une los puntos $A(\frac{3}{2}, 0)$ y $B(2,2)$.
Sol.: $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{5} - \pi\right)$.

17. Calcula la integral:

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x}{x^2 + (2y-1)^2} + y^2 \right) dx + \left(\frac{2(2y-1)}{x^2 + (2y-1)^2} + x(2y-1) \right) dy$$

donde γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que, en el primer cuadrante, va desde $A(1,0)$ hasta $B(0,1)$.
Sol.: $I = -\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.