Soluciones del examen de Análisis Matemático

(10/febrero/2011)

Problema 1. (*2,5 puntos*)

(a) Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y^2 = cx^3$.

(b) Demuestre que $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ *es un factor integrante para la ecuación*

$$(x^2 + y^2 - x)\, dx - y\, dy = 0,$$

y mediante dicho factor intégrela.

Solución

(a) Dada la familia de curvas $y^2 = cx^3$, buscamos su ecuación diferencial eliminado c entre la ecuación de la familia y su derivada:

$$\begin{cases} y^2 = cx^3 \\ 2yy' = 3cx^2 \end{cases}$$

despejando en la primera ecuación, $c = \dfrac{y^2}{x^3}$, y sustituyendo en la segunda:

$$y' = \frac{3}{2}\frac{y}{x}.$$

En consecuencia, la ecuación de las trayectorias ortogonales es

$$-\frac{1}{y'} = \frac{3}{2}\frac{y}{x},$$

con lo que, operando, se obtiene la ecuación de variables separadas

$$-xdx = \frac{3}{2}ydy$$

que integrando resulta

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{3}{4}y^2 + k,\ k \in \mathbb{R},$$

y operando, se obtiene que la familia ortogonal a la dada es

$$2x^2 + 3y^2 = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Multiplicamos por $\mu(x, y)$ la ecuación dada:

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - x)dx - \frac{y}{x^2 + y^2}dy = 0$$

y ahora comprobamos que ésta es exacta. Para ello, llamamos

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2-x) = 1-\frac{x}{x^2+y^2} \\ Q(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

y sólo tenemos que comprobar que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 0-\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una ecuación exacta. Para resolverla buscamos una función potencial U, es decir, que verifique

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= P(x,y) = 1-\frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= Q(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Integrando respecto de la variable y en la segunda ecuación obtenemos

$$U(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}dy + \varphi(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(x),$$

que derivando respecto de la variable x, y teniendo en cuenta la primera ecuación de (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}+\varphi'(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= 1-\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi'(x) = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = x+k,\ k\in\mathbb{R}$$

Por tanto,

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+x+k, \quad k\in\mathbb{R},$$

y la solución general de la ecuación viene dada implícitamente por

$$\boxed{x-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C, \quad C\in\mathbb{R}.}$$

Problema 2. (*2,5 puntos*) *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:*

(a) $y^{iv)} + 4y'' = \operatorname{sen} x$
(b) $(x^2+1)y'' - 2xy' - (x+1)^2 y = 0$, *sabiendo que* $y_1 = e^{-x}$ *es una solución.*

Solución

(a) El polinomio característico de la ecuación es $P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2+4)$ y las raíces de la ecuación característica, $P(\lambda) = 0$, son $\lambda = 0$ con multiplicidad 2 y $\lambda = \pm 2i$ con multiplicidad 1. Por tanto

$$\{1, x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x)\}$$

es una base fundamental. Según el método de similitud, la ecuación completa admite una solución de la forma

$$y = a\cos x + b \operatorname{sen} x.$$

Para determinar a y b, derivamos

$$\begin{aligned} y' &= -a \operatorname{sen} x + b\cos x \\ y'' &= -a\cos x - b \operatorname{sen} x \\ y''' &= a \operatorname{sen} x - b\cos x \\ y^{iv)} &= a\cos x + b \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

y sustituimos en la ecuación dada, obteniendo

$$-3a\cos x - 3b \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -1/3 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} x + c_1 + c_2 x + c_3\cos(2x) + c_4 \operatorname{sen}(2x), \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1\ldots 4.}$$

(b) Dado que se trata de una ecuación homogénea, por la fórmula de Liouville, si y_2 es una solución de la ecuación linealmente independiente de y_1, entonces para algún $C \neq 0$, se verifica

$$e^{-2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{e^{-x}}\right) = Ce^{-\int \frac{-2x}{x^2+1}dx} = Ce^{\ln(x^2+1)+k} = C(x^2+1)C^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Considerando $k = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{e^{-x}} &= C\int (x^2+1)e^{2x}dx = C\left((x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}\,dx\right) \\ &= C\left((x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx\right)\right) = C\frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3 + \tilde{k}), \quad \tilde{k} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así, tomando $\tilde{k} = 0$, para $C = 4$ se tiene que $y_2 = e^x(2x^2 - 2x + 3)$ es una solución linealmente independiente con $y_1 = e^{-x}$, por tanto, la solución general es

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x(2x^2 - 2x + 3), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Resolver, aplicando transformada de Laplace , el Problema de Cauchy

$$\begin{bmatrix} x' - x + 2y = e^{-t} \\ y' - y = 3e^{t}\cos t \end{bmatrix} x(0) = 0, y(0) = 2$$

Solución

P1: Llamamos $L(x(t)) = F(s), L(y(t)) = G(s)$ y, entonces

$$L(x'(t)) = sF(s), L(y'(t)) = sG(s) - 2,$$

$$L(e^{-t}h(t)) = \frac{1}{s+1}, L(\cos t\, h(t)) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$L(3e^{t}\cos t\, h(t)) = \frac{3(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$\begin{cases} (s-1)F(s) + 2G(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ (s-1)G(s) = 2 + 3\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} \end{cases}$$

P2: Despejamos las incógnitas

$$G(s) = \frac{2}{(s-1)} + \frac{3}{(s-1)^2+1}, F(s) = \frac{1}{s^2-1} - \frac{4}{(s-1)^2} - \frac{6}{(s-1)((s-1)^2+1)}$$

P3: Tomamos antitransformadas

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) = e^{t}h(t), L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right) = e^{t}\sin t\, h(t),$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s)^2-1}\right) = \sinh t\, h(t), L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = t\, e^{t}h(t)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)((s-1)^2+1)}\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) - L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right) = e^{t}h(t) - e^{t}\cos t\, h(t),$$

Con lo cual $\quad x(t) = \{\sinh t - 4t\, e^{t} - 6\, e^{t} + 6e^{t}\cos t\}h(t)$

$$y(t) = \{2\, e^{t} + 3e^{t}\sin t\}h(t)$$

Problema 4. (*(2,5 puntos)*) Calcule el volumen del sólido acotado entre el plano $z = 0$, el paraboloide $9 - z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

El cilindro, cuya ecuación también se puede escribir como $x^2 + (y-1)^2 = 1$, es de base circular, su eje es paralelo al eje Z y pasa por el punto $(0,1,0)$. El paraboloide tiene su vértice en $(0,0,9)$ y su intersección con el plano XY es la circunferencia $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{array} \right.$. El sólido, llamémosle Ω, se proyecta en la región de $\mathbb{R}^2$ que encierra el cilindro, es decir,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2y\},$$

y está delimitado por las gráficas de las funciones $z = f_1(x,y) = 0$ y $z = f_2(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$, siendo $f_2(x,y) \geq f_1(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in D$, por tanto, el volumen de Ω, $Vol(\Omega)$, viene dado por

$$Vol(\Omega) = \iint_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy = \iint_D (9 - (x^2 + y^2))dxdy.$$

Teniendo en cuenta cómo es la función integrando, parece adecuado un cambio de variable a coordenadas polares: $\varphi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array} \right.$ siendo el jacobiano $J_\varphi(\rho,\theta) = \rho$. La frontera de D, $x^2 + y^2 = 2y$, se transforma con el cambio de variable en $\rho^2 = 2\rho\operatorname{sen}\theta$, es decir, $\rho = 0$ ó $\rho = 2\operatorname{sen}\theta$; y para que esta curva esté definida debe ser $\theta \in [0,\pi]$, luego

$$S = \varphi^{-1}(D) = \left\{ (\rho,\theta) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2\operatorname{sen}\theta \end{array} \right\}$$

Por tanto, teniendo en cuenta el teorema del cambio de variable

$$\begin{aligned} Vol(\Omega) &= \iint_S (9 - \rho^2)\rho\, d\rho d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} (9\rho - \rho^3)d\rho \\ &= \int_0^\pi \left(\left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=2\operatorname{sen}\theta} \right) d\theta = \int_0^\pi \left(18\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}^4\theta\right) d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \left(18\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}^4\theta\right) d\theta = 18\beta(3/2,1/2) - 4\beta(5/2,1/2) = \boxed{\frac{15}{2}\pi} \end{aligned}$$