Examen Extraordinario de Septiembre

(11/Septiembre/00)

Problema 1. (20ptos.)
Calcular, utilizando el teorema de Green-Riemann, la integral curvilínea

$$I = \int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2} - xy\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right) dy,$$

donde γ es el arco de la circunferencia $x^2+y^2=4$ que une $A(2,0)$ con $B(0,2)$ y se encuentra situado en el primer cuadrante.

Problema 2.
Sea D el recinto acotado del primer cuadrante encerrado por la curva $(x^2+y^2)^3 = xy^3$.
(a) (10ptos) Hallar el área de D.
(b) (15ptos) Calcular la integral sobre D de $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Problema 3. Resolver las siguientes cuestiones sobre ecuaciones diferenciales:
(a) (10ptos) Obtener la ecuación diferencial cuya integral general es la familia de curvas

$$y = \operatorname{sen} x + C\cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) (15ptos) Resolver, mediante un factor integrante función de y, la ecuación diferencial

$$y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0.$$

(c) (10ptos) Resolver la ecuación diferencial

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

sabiendo que admite soluciones polinómicas.

Problema 4. (20ptos.)
Dada la función $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t < K \\ K & \text{si } t \ge K \end{cases}$ siendo K una constante positiva ($K > 0$).
(a) Determinar la transformada de Laplace de f.
(b) Resolver el problema de Cauchy:

$$(P)\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$