

Soluciones del examen de Análisis Matemático
Convocatoria extraordinaria de junio
(5/julio/2011)

Problema 1. (2,5 puntos) Resuelva la ecuación diferencial

$$e^x \left(\frac{y}{x} - 1 \right) dx + \frac{1}{x} (1 + e^x) dy = 0 \quad (1)$$

sabiendo que admite factor integrante función de x , es decir, $\mu(x, y) = \varphi(x)$.

Solución: Por ser $\varphi(x)$ un factor integrante de la ecuación, ha de verificarse:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi(x) \cdot e^x \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(x) \cdot \frac{1}{x} (1 + e^x) \right),$$

es decir,

$$\varphi(x) \cdot \frac{e^x}{x} = \varphi'(x)(1 + e^x) \frac{1}{x} + \varphi(x) \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1 + e^x}{x^2} \right),$$

y operando se llega a la ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x},$$

que integrando proporciona factores integrantes: $\ln |\varphi| = \ln |x| + C$, y en consecuencia $\varphi(x) = x$ es un factor integrante. Así, multiplicando la ecuación (1) por x se obtiene la ecuación exacta

$$e^x(y - x) dx + (1 + e^x) dy = 0 \quad (2)$$

cuyas soluciones coinciden con las de (1), puesto que, al multiplicar por el factor integrante, ni se pierden ni se añaden soluciones. Por ser (2) una ecuación exacta, sabemos que su solución general viene dada implícitamente como $F(x, y) = C$, con $C \in \mathbb{R}$, donde F es una función potencial de $(P, Q) = (e^x(y - x), 1 + e^x)$, esto es,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^x(y - x) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 + e^x \implies F(x, y) = \int (1 + e^x) dy = (1 + e^x)y + \alpha(x) \end{cases}$$

y derivando $F(x, y)$ respecto de x e igualando con la primera ecuación, se tiene

$$e^x y + \alpha'(x) = e^x(y - x) \implies \alpha'(x) = -x e^x \implies \alpha(x) = - \int x e^x dx = e^x - x e^x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Así, si $k = 0$, $F(x, y) = (1 + e^x)y + e^x - x e^x$ es una función potencial de (P, Q) , por tanto,

$$(1 + e^x)y + (1 - x)e^x = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Problema 2. (2,5 puntos) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, sabiendo que $y_1 = x$ es una solución particular.

(b) $y''' - y'' + y' - y = e^x$.

Solución: (a) Aplicando la fórmula de Liouville, en el caso particular de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, se tiene que si y_1, y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea dada, entonces, para algún $C \neq 0$

$$W[y_1, y_2] = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = Ce^{-\int \frac{-2x}{x^2} dx} = Ce^{\int \frac{2}{x} dx} = Ce^{2 \ln x} = Cx^2,$$

así, si $y_1 = x$, se tiene que

$$x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{x} \right) = Cx^2 \implies \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{x} \right) = C \implies \frac{y_2}{x} = Cx + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

y para $C = 1$ y $K = 0$ se obtiene la solución $y_2 = x^2$ linealmente independiente con y_1 . Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = c_1x + c_2x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(b) La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$, así, $\lambda = 1$ y $\lambda = \pm i$ son raíces simples; por tanto, $\{e^x, \cos x, \sin x\}$ es una base fundamental y la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a la dada es

$$y_{GH} = c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial completa, por el método de similitud, sabemos que admite una solución de la forma

$$y_{PC} = Axe^x,$$

y para determinar A , derivamos:

$$\begin{aligned} y' &= A(1+x)e^x \\ y'' &= A(2+x)e^x \\ y''' &= A(3+x)e^x \end{aligned}$$

y sustituimos en la ecuación completa:

$$A(3+x)e^x - A(2+x)e^x + A(1+x)e^x - Axe^x = e^x \implies A(3+x) - A(2+x) + A(1+x) - Ax = 1 \implies A = 1/2$$

Por tanto,

$$y_{PC} = \frac{1}{2}xe^x$$

y la solución general de la ecuación completa es

$$y_{GC} = y_{PC} + y_{GH} = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Problema 3. (2,5 puntos) Aplicando la propiedad de convolución de la transformada de Laplace, resuelva la ecuación

$$x(t) = t + 2 \int_0^t x(u) \cos(t - u) du$$

Solución: Podemos observar que la integral presente en la ecuación es la siguiente convolución:

$$x(t) * \cos t = \int_0^t x(u) \cos(t - u) du,$$

cuya transformada de Laplace es

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t x(u) \cos(t - u) du \right) = \mathcal{L}(x(t) * \cos t) = F(s) \frac{s}{s^2 + 1},$$

siendo $F(s) = \mathcal{L}(x(t))$. Por tanto, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación dada, se obtiene:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + 2F(s) \frac{s}{s^2 + 1},$$

y despejando $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s - 1)^2} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s - 1} + \frac{2}{(s - 1)^2}.$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa de Laplace, se llega a que

$$x(t) = (2 + t + 2e^t(t - 1)) h(t)$$

Problema 4. ((2,5 puntos) Calcule la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

siendo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Solución: Dado que el dominio es una región limitada por dos esferas centradas en el origen, parece adecuado un cambio de variable a las coordenadas esféricas $\psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ siendo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \left| J \begin{pmatrix} x, y, z \\ \rho, \theta, \varphi \end{pmatrix} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

con lo que la integral quedaría:

$$I = \iiint_{\psi^{-1}(\Omega)} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \rho^4 d\rho = \boxed{\frac{31}{15}\pi}$$